教育部100學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（二）參考解

【第一題參考解】

(a) 因為 $x << w$ 條件，可以視為無限大平板。由安培迴路定理知上板所產生的磁場 B_{up} 符合關係式：

$$B_{up} \times 2w = \mu_0 I \text{ ，}$$

故 $B_{up} = \dfrac{\mu_0 I}{2w}$ ，同下板也產生相同的大小的磁場，即：

$$B_{down} = \frac{\mu_0 I}{2w} \text{ 。}$$

在兩板之外，上下板所產生場的方向相反，故無磁場。兩板之間，場方向相同，所以場的大小等於兩者之和，即： $B = \dfrac{\mu_0 I}{w}$ 。方向為 $+\hat{y}$ 。

(b) 每一板所受的作用力相等。上板受力 F_{up} 等於：

$$\vec{F}_{up} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}_{up} = \mu_0 I^2 \frac{\ell}{2w} \hat{z} \text{ 。}$$

同理下板為：

$$\vec{F}_{down} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}_{down} = \mu_0 I^2 \frac{\ell}{2w} \left(-\hat{z}\right) \text{ 。}$$

兩板之間受到排斥力。

(c) 因為電流 I 保持定值，所以磁場維持定值。因為上板移動，而上板的感應電動勢 ε 等於感應電場與長度的乘積，即：

$$\varepsilon = E \cdot \ell \text{ ，}$$

感應電動勢 ε 也等於反抗磁通量的變化，即：

$$B_{up} \times \ell \times \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ ，}$$

兩式相比較得知電場： $E = \dfrac{\mu_0 I}{2w} \times \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ，方向與 I 反向。

(d) 磁能增加量為磁能密度乘以所增加的體積，即：

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \times \left(\ell \times w \times \Delta s\right) = \mu_0 I^2 \frac{\ell}{2w} \times \Delta s \text{ ，}$$

而上板移動 Δs 須做之功等於：

$$F_{up} \times \Delta s = \mu_0 I^2 \frac{\ell}{2w} \times \Delta s \text{ ，}$$

故上兩式總和為 $\mu_0 I^2 \frac{\ell}{w} \times \Delta s$ ，即電流源所需提供之總能量。

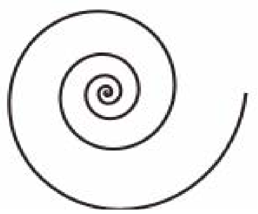
(e) 由兩板間所儲存的磁能等於：

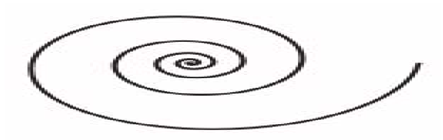
$$\frac{B^2}{2\mu_0} \times (\ell \times w \times s) = \mu_0 I^2 \frac{\ell}{2w} \times s$$

上式依據電感的定義恰等於 $\frac{1}{2} L I^2$ 。由上述關係，可以得到兩平板的電感 L 為： $\frac{\mu_0 \ell x}{w}$ 。

【第二題參考解】

(a) 在平面上以螺旋方式向原點運動





(b) $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ ➔ $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$

徑向運動方程式：$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -f(r) - b\dot{r}$

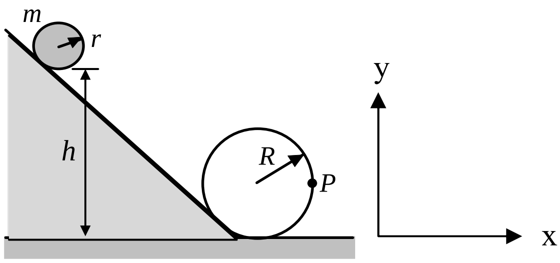
切向運動方程式：$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -br\dot{\theta}$

(c) $\begin{cases} \text{因為 } L = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dfrac{dL}{dt} = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \\ \text{代入切向運動方程式 } m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -br\dot{\theta} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dL}{dt} = -br\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = -\frac{b}{m}mr^2\dot{\theta} = -\frac{b}{m}L \Rightarrow \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = -\frac{b}{m}t \Rightarrow L = L_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$\therefore t = \dfrac{m}{b}\ln 2$ 時角動量為原始的一半。

【第三題參考解】



(a) 最初實心圓球的質心離圓環底部的高度為 h + r；當實心圓球到達圓環頂部時，實心圓球的質心離圓環底部的高度為 2R – r。

由能量守恆得知 $\Delta K_{rot} + \Delta K_{trans} + \Delta U = 0$

因此，$mg(h+r) = mg(2R-r) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

對實心圓球而言 $I = \frac{2}{5}mr^2$ 與 $v = r\omega$，所以上式變為

$$gh + 2gr = 2gR + \frac{7}{10}v^2 \qquad (1)$$

在 $h = h_{min}$ 時，實心圓球能到達圓環頂部時的速度應滿足下列條件

$$\sum F = mg = \frac{mv^2}{(R-r)} \quad \text{or} \quad v^2 = g(R-r) \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式可得

$$h_{min} = 2(R-r) + 0.700(R-r)$$

or $\boxed{h_{min} = 2.70(R-r) \cong 2.70R}$

(b) 當實心圓球最初在 h = 3R 處而最後到達 P 點時，由能量守恆式可得

$$mg(3R+r) = mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2$$

or $v^2 = \frac{10}{7}(2R+r)g$

當實心圓球滾動而不滑動以順時鐘旋轉通動 P 點時,實心圓球受到向上靜摩擦力的力矩所產生的逆時鐘旋轉角加速度而減速。

鉛直方向的運動式為 $\sum F_y = ma_y$ ；$\sum \tau = I\alpha$ 而 a = rα，於是可得

$$f - mg = -m\alpha r \qquad (3)$$

$$fr = \left(\frac{2}{5}\right)mr^2\alpha \qquad (4)$$

把(4)式代入(3)式並消去 f 可得 $\alpha=\frac{5g}{7r}$，

$$\therefore \sum F_y=\boxed{-\frac{5}{7}mg}$$

水平方向的運動式為

$$\sum F_x=-n=-\frac{mv^2}{R-r}=-\frac{\left(\frac{10}{7}\right)(2R+r)}{R-r}mg \cong \boxed{\frac{-20mg}{7}} \quad (\because \ R>>r)$$

【第四題參考解】

(a) 水柱在Δt時間內從水槍中噴射出沖擊一個鉛直平面的水的體積為$A\mathrm{v}\Delta t$，這些水的質量為

$$m = \rho_o A\mathrm{v}\Delta t$$

這些水沖擊平面前一瞬間的動量為$m\mathrm{v}$，方向沿水平；沖擊平面後向四處散開，幾乎沒有水平方向的速度。亦即這些水沖擊平面後幾乎沒有水平方向的動量。這些水動量的改變主要是因為受到平面的作用力。由由動量守恆定理

$$F\Delta t = 0 - m\mathrm{v}$$

$$F = \rho_o A\mathrm{v}^2$$

水衝擊的力量與液體的密度及水柱截面積成正比,與水柱的速度平方成正比。

水壓為

$$P = \frac{F}{A} = \rho_o \mathrm{v}^2 = 1000 * 30^2 = 9 * 10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

(b) 作用在立方石頭的力等於水相對於地球的動量改變率.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}(\mathrm{v} - u)$$

$\frac{dm}{dt}$是水射向石頭的質量改變率， u是石頭速度， v是水的速度，

$\frac{dm}{dt} = 60$仟克/秒， v=30 米/秒，石頭質量 M=2000 仟克，則石頭之加速度

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{F}{M} = \frac{1}{M}\frac{dm}{dt}(\mathrm{v} - u)$$

代入數值則

$$\frac{du}{dt} = 0.9 - 0.03u$$

$$\int \frac{du}{0.9 - 0.03u} = \int dt + C$$

$$u = 30 - \frac{1}{0.03}e^{-0.03(t+C)}$$

在 t=0，u=0，所以$C = -\frac{1}{0.03}\ln(0.09)$

$$u = 30\left(1 - e^{-0.03t}\right)$$

$$a = \frac{du}{dt} = 0.9e^{-0.03t}$$

在 t=0　　a=0.9 m/s

當石頭移動後，加速度漸趨近於 0，石頭速度趨近 30m/s 。

(c) 利用簡單估算流速為 v 的河水能沖走多大的石頭。圖中 F 為河水的沖力。若石頭的密度為 ρ ，河水的密度為 ρ_o，那麼石頭的重力 mg 為 $\rho g d^3$。

在圖中自左向右流的河水沖擊下，石頭會因河床下凹凸不平而滾動，繞圖中 AB 邊向前翻滾，亦即河水能沖走這塊石頭的條件是：河水沖力 F 對 AB 邊的力矩大於或等於力 P 對 AB 邊的力矩。用式子表示為

$$F\cdot\frac{d}{2}\geq P\cdot\frac{d}{2}$$

亦即 $F\geq P$ 時石頭會翻轉。依照(a)整個沖擊石頭有效力矩的平均力為

$$F=\tfrac{1}{2}\rho_o A\mathrm{v}^2\text{，}$$

所以河水能沖走的最大的石頭質量為

$$M=\rho d^3=\frac{\rho_o^3}{8\rho^2 g^3}\mathrm{v}^6$$

可見，河水能沖走的石頭質量與河水流速的 6 次方成正比。當水的流速增大到 2 倍時，能被水沖走的石頭質量增大到 64 倍。這是多可怕的結果。

一般石頭的密度 $\rho=2.5\,\mathrm{g/cm^3}$，水的密度 $\rho_o=1.0\ \ \mathrm{g/cm^3}$，由上式知，能被河水沖走的石頭最大邊長及最大質量分別為

$$d=3.4\times10^{-2}\,\mathrm{v}^2 m$$
$$M=9.8\times10^{-2}\,\mathrm{v}^6 kg$$

當河水的流速 v = 0.5m/s 時，由上式求得能被河水沖走的石頭最大邊長為 d=0.85cm，石頭質量為 M=1.53 克，當河水的流速 v=5.0 米/秒時，能被河水沖走的石頭最大邊長為 $d=85$cm，石頭質量為 M =1535 kg = 1.5 噸。

【第五題參考解】

(a)

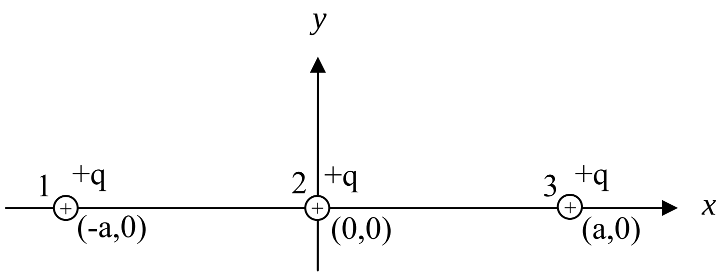


圖　一

庫倫定律 $\vec{F} = k\dfrac{qQ}{r^2}\hat{r}$

設點電荷帶電量為 q，它們所在位置如圖一所示。

電荷 2 在(0,0)位置所受力為

來自電荷 1：　$k\dfrac{q^2}{a^2}\hat{x} = \vec{F}_{12}$

來自電荷 3：　$-k\dfrac{q^2}{a^2}\hat{x} = \vec{F}_{32}$

合力　$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 0$

所以 (0,0) 為一平衡點。

若電荷 2 稍接近電荷 3，位置為(ε,0)，ε > 0，則

$\vec{F}_{12} = k\dfrac{q^2}{(a+\varepsilon)^2}\hat{x}$　，　$\vec{F}_{32} = -k\dfrac{q^2}{(a-\varepsilon)^2}\hat{x}$

顯然 $|\vec{F}_{12}| < |\vec{F}_{32}|$，所以合力 $\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$ 為往 $-\hat{x}$ 方向，會將電荷 2 推向平衡點(0,0)。

同理，若電荷 2 位置為(-ε,0)，合力會將之推向平衡點，因此，在 x 方向，(0,0)為一穩定平衡點。

如圖二所示，將電荷 2 稍往 y 方向偏，例如位置在(0,ε)，ε > 0，則由力圖所示，其所受合力會朝向正 y 方向，也就是被推離平衡點，所以在 y 方向，(0,0)為一不穩定平衡點。

ps:（若電荷 2 帶負電，則在 y 方向(0,0)為穩定平衡點，但在 x 方向為不穩定平衡點。）

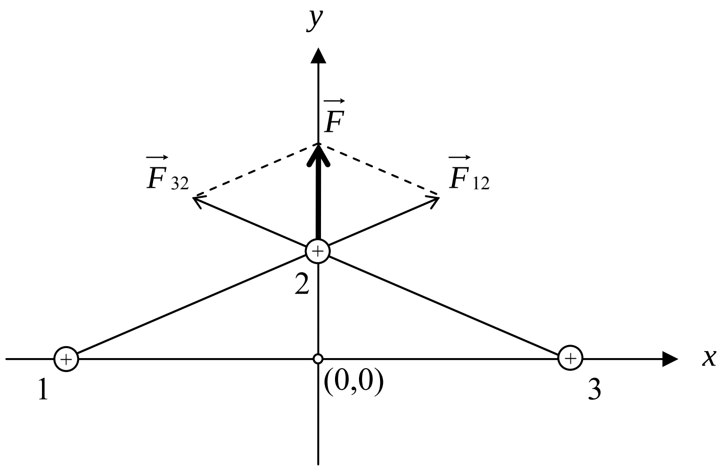


圖　二

(b) 設正方形頂點的四個點電荷都在 xy 平面上，若中心點電荷 5 的位置稍偏離 xy 平面（例如位置為(0,0,ε)，ε > 0），則由正方形的對稱性及庫倫力的合力圖（如圖三），很容易看出，電荷 5 所受合力 $\vec{F}$ 朝向正 z 方向，亦即被推向遠離平衡點(0,0,0)，所以正方形中心的平衡點為一不穩定的平衡點。

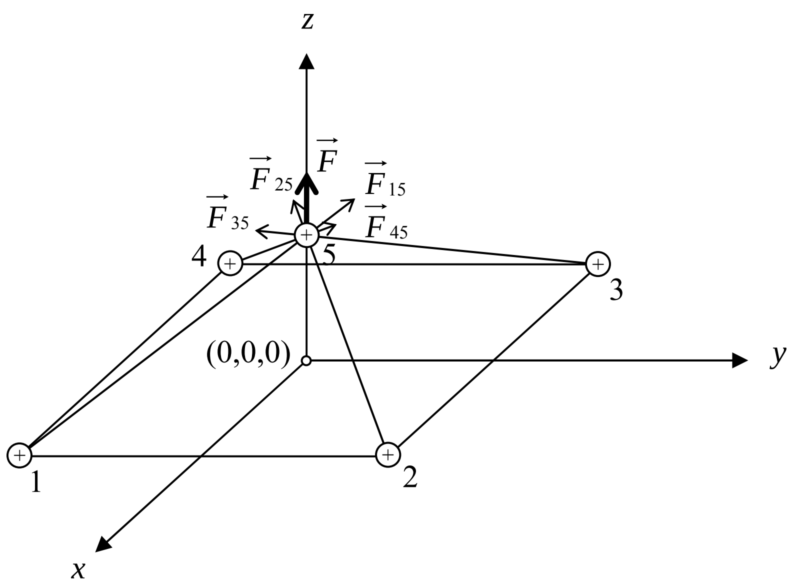


圖　三

*（另方面，在 xy 平面上，平衡點(0,0)卻是個穩定平衡點。這可以證明，但此題重點是，在 z 方向(0,0,0)是不穩定平衡點。）

(c) 正方體中心點仍是不穩定平衡點。可以證明如下：

令中心座標(0,0,0)正方體八個頂點座標分別為(a,a,-a), (-a,a,-a), (-a,-a,-a), (a,-a,-a), (a,a,a), (-a,a,a), (-a,-a,a), (a,-a,a)，如圖四

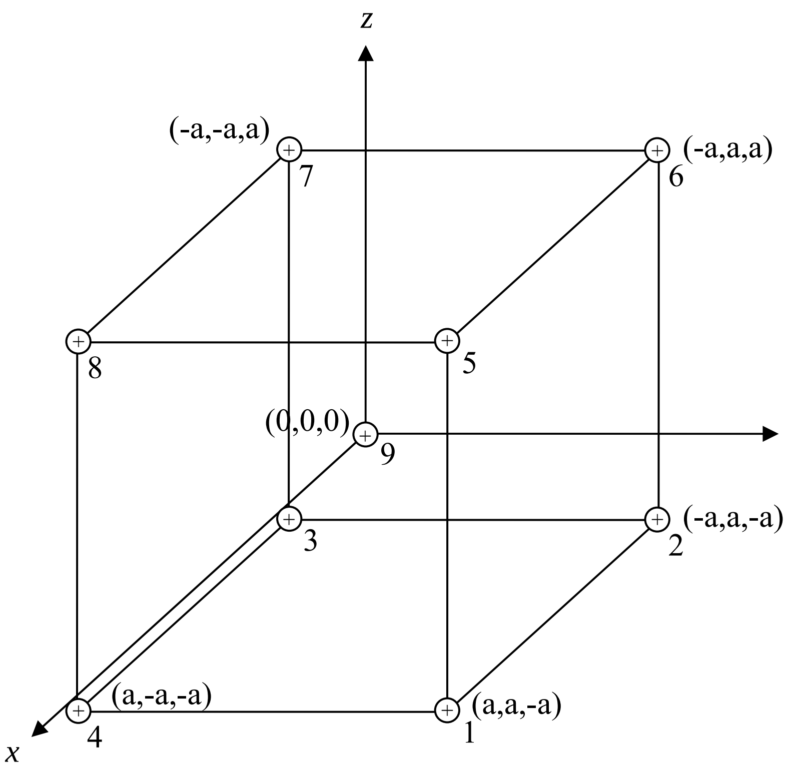


圖　四

由對稱性知點電荷在(0,0,0)所受合力為 0 → (0,0,0)為平衡點。

令點電荷 9 稍偏離中心，例如座標為(ε,0,0)，ε > 0

電荷 1 對此電荷 9 的力為

$$\vec{F}_{19} = k\frac{q^2}{[(a-\varepsilon)^2 + a^2 + a^2]}\hat{r}_{19}$$，方向在電荷 1、9 的連線上。

此力在 x 方向的分量為

$$F_{x_{19}} = k\frac{q^2}{[(a-\varepsilon)^2 + 2a^2]}\cdot\frac{-(a-\varepsilon)}{\sqrt{(a-\varepsilon)^2 + 2a^2}}$$

由對稱性我們可以看出電荷 1、4、5、8 對電荷 9 的合力必然在 $-\hat{x}$ 方向，且大小就是 $F_{x_{19}}$ 大小的四倍。

$$\vec{F}_{19} + \vec{F}_{49} + \vec{F}_{59} + \vec{F}_{89} = 4kq^2\frac{-(a-\varepsilon)}{[(a-\varepsilon)^2 + 2a^2]^{3/2}}\hat{x} \qquad (1)$$

同理，另外四個電荷對電荷 9 的合力為

$$\vec{F}_{29} + \vec{F}_{39} + \vec{F}_{69} + \vec{F}_{79} = 4kq^2\frac{(a+\varepsilon)}{[(a+\varepsilon)^2 + 2a^2]^{3/2}}\hat{x} \qquad (2)$$

而合力就是(1)與(2)之和，

$$\vec{F} = 4kq^2 \left\{ \frac{a+\varepsilon}{[(a+\varepsilon)^2 + 2a^2]^{3/2}} - \frac{a-\varepsilon}{[(a-\varepsilon)^2 + 2a^2]^{3/2}} \right\} \hat{x}$$

括弧中的值若是大於0，則合力在正x方向，表示電荷9會被推離中心(0,0,0)，中心就是不穩定點。

要證明 $\dfrac{a+\varepsilon}{[(a+\varepsilon)^2 + 2a^2]^{3/2}}$ 大於 $\dfrac{a-\varepsilon}{[(a-\varepsilon)^2 + 2a^2]^{3/2}}$ ，我們令

$$f(x) = \frac{a+x}{[(a+x)^2 + 2a^2]^{3/2}}$$

證明 $f(\varepsilon) > f(-\varepsilon)$ ，$\varepsilon << 1$

利用泰勒展開式：若$\eta << 1$

$$(1+\eta)^{-3/2} = 1 + (-\frac{3}{2})\eta + \frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\eta^2 + \frac{1}{6}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})\eta^3 + \cdots\cdots$$

我們將$[(a+x)^2 + 2a^2]^{-3/2}$展開至x的三次方，

*（展開至x的一次方或二次方，都會得到$f(\varepsilon) = f(-\varepsilon)$，所以必須展開至三次方才能得知$f(\varepsilon) > f(-\varepsilon)$。）

$$[(a+\varepsilon)^2 + 2a^2]^{-3/2}$$

$$= (3a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2)^{-3/2}$$

$$= (3a^2)^{-3/2} \left[1 + \frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{3a^2} \right]^{3/2}$$

$$= (3a^2)^{-3/2} \left[1 - \frac{3}{2}\frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{3a^2} + \frac{15}{8}\left(\frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{3a^2} \right)^2 - \frac{35}{16}\left(\frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{3a^2} \right)^3 + \cdots\cdots \right]$$

$$= (3a^2)^{-3/2} \cdot \frac{1}{6a^4} \left[6a^4 - 6a^3\varepsilon + 2a^2\varepsilon^2 + \frac{10}{9}a\varepsilon^3 + \cdots\cdots \right]$$

$$f(\varepsilon) = (a+\varepsilon)[(a+\varepsilon)^2 + 2a^2]^{-3/2}$$

$$= (3a^2)^{-3/2} \cdot \frac{1}{6a^4}[6a^5 - 4a^3\varepsilon^2 + \frac{28}{9}a^2\varepsilon^3 + \cdots\cdots]$$

同理，我們可以得到

$$f(-\varepsilon) = (a-\varepsilon)[(a-\varepsilon)^2 + 2a^2]^{-3/2}$$

$$=(3a^2)^{-3/2}\cdot\frac{1}{6a^4}[6a^5-4a^3\varepsilon^2-\frac{28}{9}a^2\varepsilon^3+\cdots\cdots]$$

所以 $f(\varepsilon)-f(-\varepsilon)=(3a^2)^{-3/2}\cdot\frac{1}{6a^4}\cdot\frac{56}{9}a^2\varepsilon^3+\cdots\cdots>0$

$\Rightarrow$ 合力 $\vec{F}=4kq^2\{f(\varepsilon)-f(-\varepsilon)\}\hat{x}$，在正 x 方向，所以電荷在(ε,0,0)會被推離平衡點(0,0,0)，故(0,0,0)為不穩定平衡點。