

教育部 100 學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽

物理科決賽實驗試題參考解

實驗設計原理

第一部分

首先我們利用單擺原理來量測擺線長度；質心位置以懸掛點為中心而擺動，而懸掛點到

擺錘質心的距離稱為擺長 l ，其(小角度)擺動的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ， g 為擺錘所受到的重力

加速度，而擺動的週期不隨著擺錘的質量改變；我們量測單擺的週期來獲得擺線長度，再利用已知的擺線長度來量測液面高度 H 。

第二部分

設液體流經孔洞速率為 v_2 ，則由連續方程式可得

$$\pi R^2 v_1 = \pi r^2 v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$\text{另由白努利方程式可得 } P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\text{代入上式可得 } P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2}\rho \left[v_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right]^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 2 \cdot \frac{g}{\left[\left(\frac{R}{r}\right)^4 - 1\right]} \cdot H$$

$$\text{因 } r、R、g \text{ 已為定值，所以定義 } a = \frac{g}{\left[\left(\frac{R}{r}\right)^4 - 1\right]} \text{ 亦為定值}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 2 \cdot a \cdot H \quad (v_1 = \sqrt{2aH}) \quad \therefore v_1 \propto \sqrt{H}$$

由 $2v_1 \frac{dv_1}{dt} = 2a \frac{dH}{dt} \Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = a$ ，可知 a 為 v_1 之加速度，且 a 為定值，所以為等加速運動。

$$v_1 = \sqrt{2aH} = v_0 - at = \sqrt{2aH_0} - at \Rightarrow \sqrt{H} = \sqrt{H_0} - \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot t$$

所以 $\sqrt{H} - t$ 圖的斜率大小為 $\sqrt{\frac{a}{2}}$

實驗步驟

1. 將螺絲帽做單擺運動，量測十個週期一次的時間，量測十次並記錄。
2. 求出週期並代入單擺公式求出擺長 l 。
3. 利用求出的擺長 l 來作已知的長度來製作一支尺。
4. 將圓柱桶裝水，底下孔洞暫時堵住。
5. 將孔洞打開，同步開始量測時間與其對應水位高 H 並記錄。
6. 可利用自製的尺來量測圓柱桶的水位高 H 。
7. 作出 $H-t$ 圖與 $H^{1/2}-t$ 圖來求出流水的加速度 a ，

再代入 $r = R \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{g+a}}$ ，求出孔徑大小 $2r$ 。

8. 用求出來的 a 來作 $v-t$ 圖。

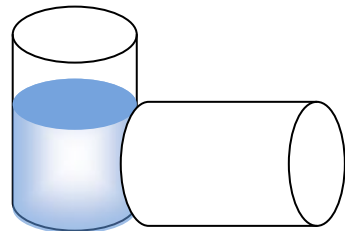
數據記錄與分析

單擺

10T(sec)	5.18	5.28	5.41	5.34	5.21	5.22	5.31	5.31	5.28	5.34
T(sec)	0.528800									
l (m)	0.06941									

利用 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 求出擺長為 0.06941 m

另法：亦可利用燒杯量筒得知當圓柱容器水位為 $2R$ 時的體積，依此可得到 R 的長度值。
再利利用已知的長度來量測液面高度 H 。



紀錄量測 $H-t$ 之關係

利用量測出的長度來作一個尺來量測水位高 H

利用擺長的 $1/4$ 為一個棉線單位

棉線單位 = 1.73525 cm

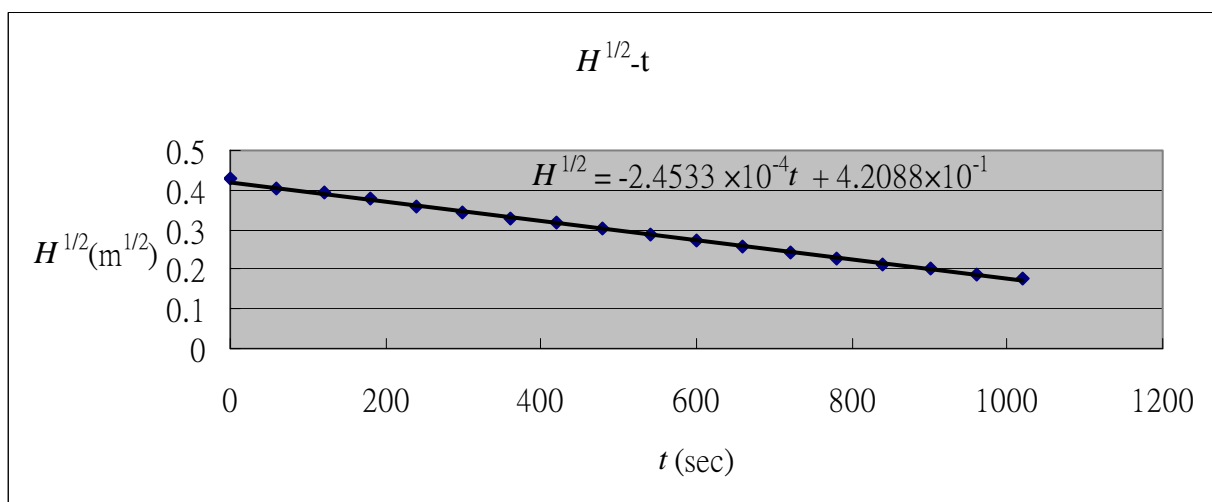
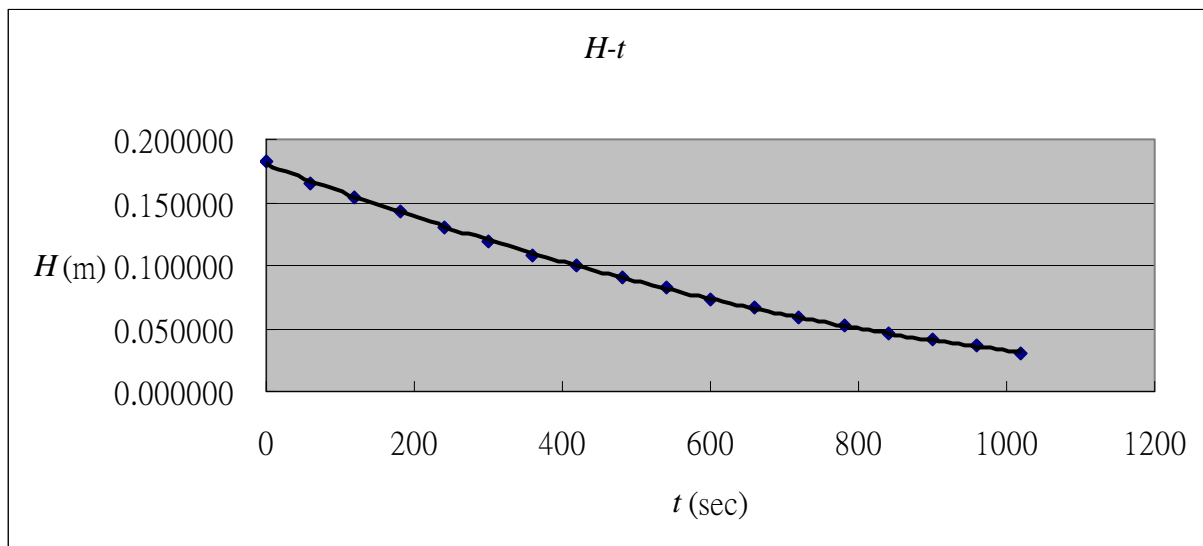
* 因乳白色塑膠圓柱桶在正常光線下不易看清楚正確之水位位置，所以可在內壁黏附已標定長度單位之膠帶，逐次記錄到達某特定水位的時間，或是，亦可固定時間間隔，再用油性細字筆標定每個時間點之水位，再用長度單位對水位高度去做量測記錄。

小孔

$t(\text{sec})$	0	60	120	180	240	300
$H(\text{棉線單位})$	10.563	9.500	8.875	8.198	7.500	6.875
$H(\text{m})$	0.183294	0.164849	0.154003	0.142256	0.130144	0.119298
$H^{1/2}(\text{m}^{1/2})$	0.42812902	0.40601570	0.39243272	0.37716813	0.36075442	0.34539606

$t(\text{sec})$	360	420	480	540	600	660
$H(\text{棉線單位})$	6.250	5.750	5.250	4.750	4.250	3.875
$H(\text{m})$	0.108453	0.099777	0.091101	0.082424	0.073748	0.067241
$H^{1/2}(\text{m}^{1/2})$	0.32932222	0.31587478	0.30182880	0.28709646	0.27156606	0.25930858

$t(\text{sec})$	720	780	840	900	960	1020
$H(\text{棉線單位})$	3.375	3.000	2.625	2.344	2.063	1.750
$H(\text{m})$	0.058565	0.052058	0.045550	0.040674	0.035798	0.030367
$H^{1/2}(\text{m}^{1/2})$	0.24200142	0.22816113	0.21342519	0.20167861	0.18920414	0.17426094



$$2R=10.4115 \text{ cm}$$

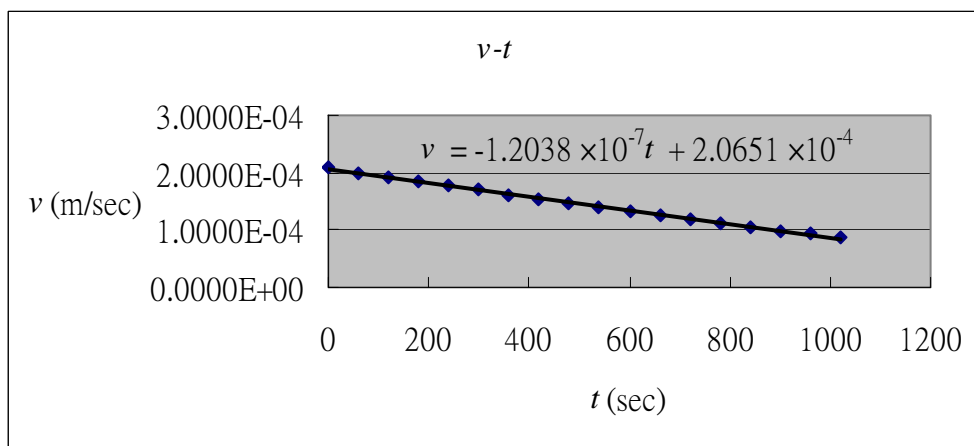
$\sqrt{H} - T$ 之回歸線斜率為 $-\sqrt{\frac{a}{2}}$

可求得 $a = 1.2037 \times 10^{-7} \text{ m/sec}^2$

$$\text{代入 } r = R \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{g+a}}$$

可求得孔徑 $2r = 0.109607 \text{ cm}$

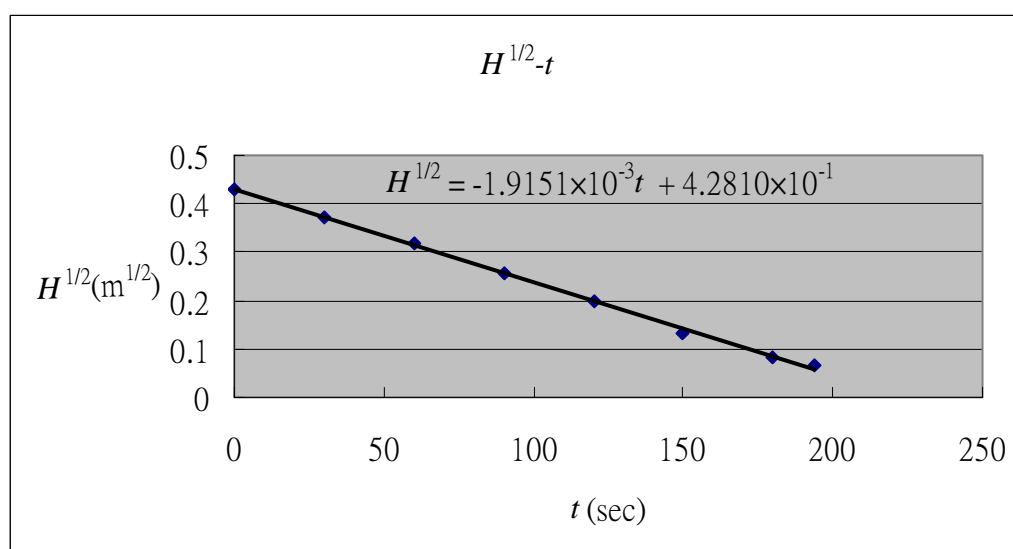
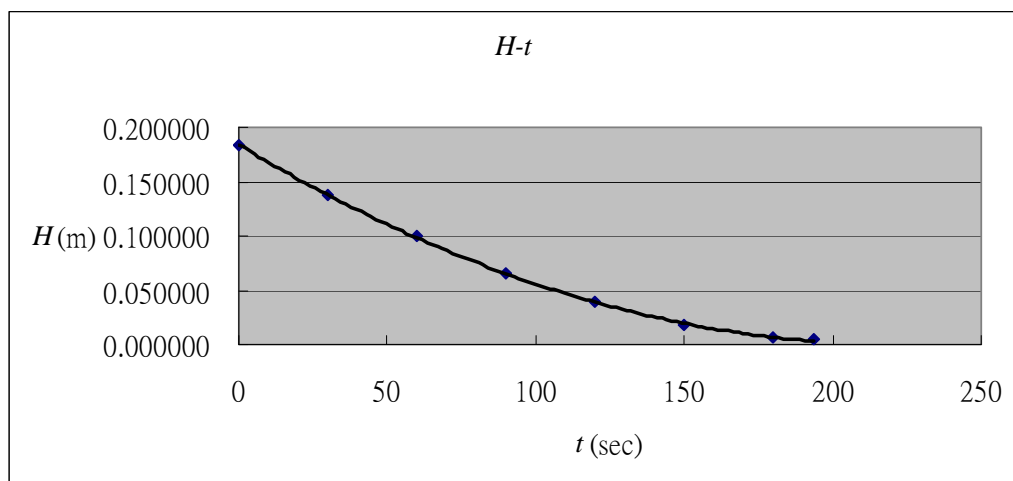
用 a 代入 $v = \sqrt{2aH}$ 作出 $v-t$ 圖



中孔

$t(\text{sec})$	0	30	60	90	120
$H(\text{棉線單位})$	10.563	7.937	5.781	3.750	2.250
$H(\text{m})$	0.183294	0.137727	0.100315	0.065072	0.039043
$H^{1/2}(\text{m}^{1/2})$	0.42812902	0.37111561	0.31672512	0.25509190	0.19759333

$t(\text{sec})$	150	180	193.91
$H(\text{棉線單位})$	1.000	0.375	0.250
$H(\text{m})$	0.017353	0.006507	0.004338
$H^{1/2}(\text{m}^{1/2})$	0.13172889	0.08066714	0.06586444



$2R=10.4115 \text{ cm}$

$\sqrt{H}-T$ 之回歸線斜率為 $-\sqrt{\frac{a}{2}}$

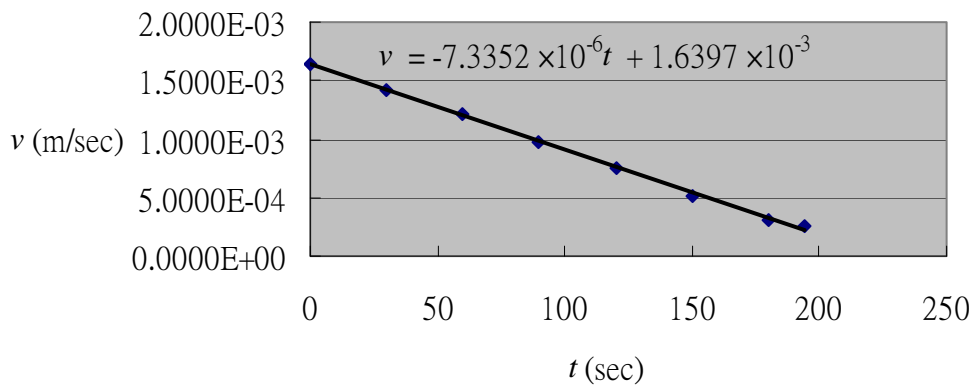
可求得 $a = 7.3352 \times 10^{-6} \text{ m/sec}^2$

代入 $r = R \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{g+a}}$

可求得孔徑 $2r = 0.306239 \text{ cm}$

用 a 代入 $v = \sqrt{2aH}$ 作出 $v-t$ 圖

$v-t$

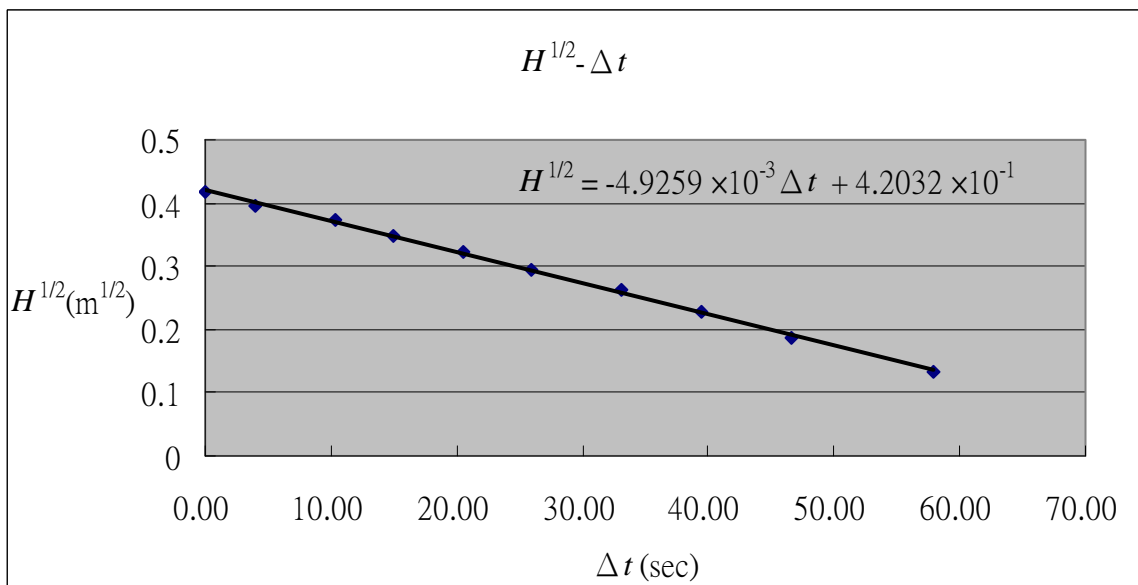
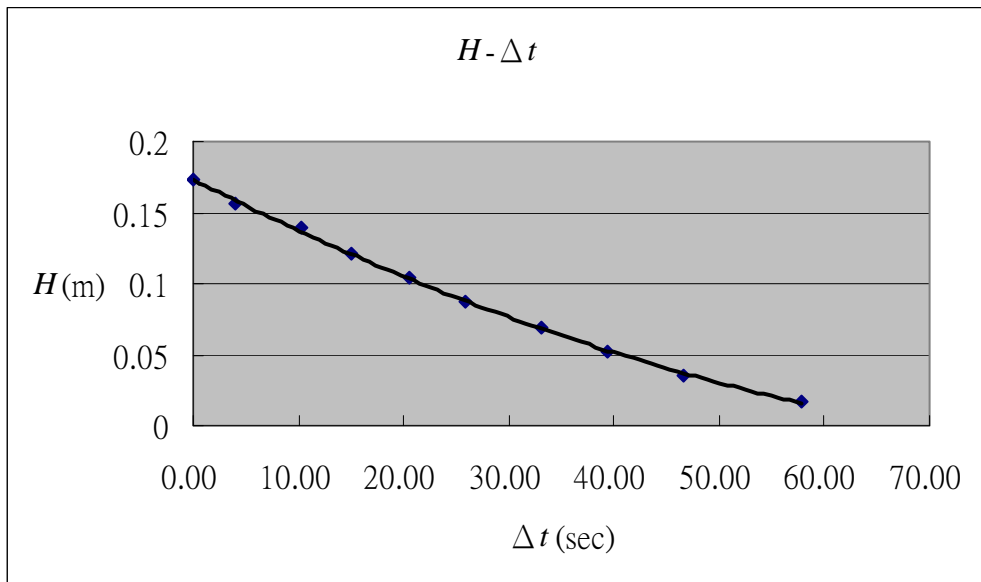


*因在大孔之情況下，水位下降非常快速，所以用上述之方法標定水位高度較不易執行，所以可改採量測某兩水位高度從開始到流完的時間差來記錄時間點。例如，若從水位 H_1 到流完所需時間為 t_1 ，從水位 H_2 到流完所需時間為 t_2 ，則若將水位高度在 H_1 時訂為時間起點 $t_1=0$ ，則水位降至 H_2 時之時間點 t_2 即為 $\Delta t = t_1 - t_2$ ，依此類推。

大孔

H (棉線單位)	10	9	8	7	6	5
H (m)	0.1735250	0.1561725	0.1388200	0.1214675	0.1041150	0.0867625
對應 t (sec)	79.59	75.66	69.31	64.63	59.12	53.69
Δt (sec)	0.00	3.93	10.28	14.96	20.47	25.90

H (棉線單位)	4	3	2	1
H (m)	0.0694100	0.0520575	0.0347050	0.0173525
對應 t (sec)	46.53	40.19	33.03	21.72
Δt (sec)	33.06	39.40	46.56	57.87



$$2R=10.4115 \text{ cm}$$

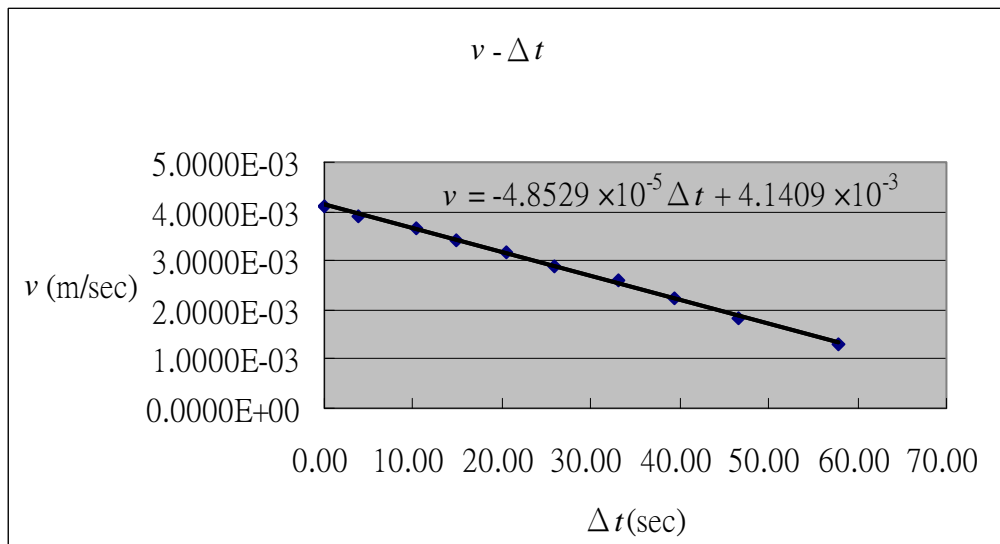
$\sqrt{H} - T$ 之回歸線斜率為 $-\sqrt{\frac{a}{2}}$

$$\text{可求得 } a = 4.8529 \times 10^{-5} \text{ m/sec}^2$$

$$\text{代入 } r = R \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{g+a}}$$

$$\text{可求得孔徑 } 2r = 0.4912 \text{ cm}$$

用 a 代入 $v = \sqrt{2aH}$ 作出 $v-t$ 圖



水流方向, 水流旋轉等因素皆會讓水流在孔洞附近有水平速度, 亦即會有上述式子(只提到垂直速度)中所未考慮到的其他能量轉換, 再加上水與孔洞間黏滯作用力的能量損耗,

皆會使實驗所得的(垂直)速度值較理論值小, ($v_1 = \sqrt{2aH}$), 所以加速度 a 的實驗值亦會較

小, 所以依 $a = \frac{g}{\left[\left(\frac{R}{r}\right)^4 - 1\right]}$ 會得出較小的孔徑半徑 r .

結果討論

1. 可以利用方格紙作輔助來固定單擺擺長, 可以減少自製尺的費時。
2. 測單擺週期要多週期測量再求平均值, 可以減少人為反應時間誤差。
3. 可以在圓筒壁內或壁外貼黏一條垂直筒底的紙條或者膠帶來作高度記號的輔助。
4. 在圓筒流水途中, 切記盡量不要碰到或移動到圓筒, 導致內部的水晃動造成誤差。
5. 務必要讓圓筒放置水平, 讓筒底的水受到相同的重力和壓力。