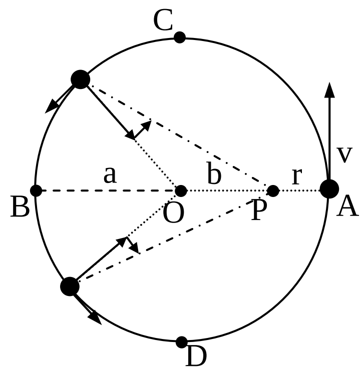
100學年度高級中學自然學科競賽第10區複賽

物理科筆試參考解

《第一題》

在ACB半圓上，引力做負功，而在BDA半圓上，引力做正功，故初速V只需大到可讓質點移至B點，即可回到A點，並週而復始。本題可利用能量守恆定律求解，因引力位能為 $-\frac{km}{r}$，式中m為質點質量，所以

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{km}{(a+b)}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{km}{(a-b)}$$



解得

$$v_B=\sqrt{\left[v^2-\frac{4kb}{(a^2-b^2)}\right]}$$

V_B有實解的條件為

$$v\geq\sqrt{\frac{4kb}{(a^2-b^2)}}$$

《第二題》

剛碰撞後，最右方二木塊之向左速度 v_f，因 $2mv_f = mv$，$\therefore v_f=\frac{1}{2}v$

這二木塊繼續向左壓縮彈簧一段距離後，被彈簧彈回向右運動。當其回到初始碰撞位置時，彈簧恢復為原來長度，這時最左方木塊所受牆壁的抗力為0，木塊和彈簧系統開始離開牆壁，最右方二木塊速度同為 $\frac{v}{2}$。

當彈簧處於最大壓縮狀態時，三木塊的速度相等（即等於系統質心的速度）。
根據能量守恆定律，總能量＝系統質心動能＋彈性位能。

$$\frac{1}{2}(2m)(\frac{v}{2})^2=\frac{1}{2}(3m)v_c^2+\frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

由動量守恆定律得

$$mv = 2mv_f = 3mv_c \tag{2}$$

由(1)和(2)式解得

$$x = \sqrt{\frac{mv^2}{6k}}$$

《第三題》

(1)

角動量 $L = mrv = \text{const.}$ (1)

m 受向心力 $F_C = \frac{mv^2}{r} = \frac{m^2r^2v^2}{mr^3} = \frac{L^2}{mr^3} = Mg$

$$\therefore v_0{}^2 = \frac{Mgr_0}{m} \tag{2}$$

(2)

M 受到向上的微小動量後，角動量保持不變。 m 的旋轉半徑為 r 時，系統受半徑加大方向的作用力

$$F = \frac{L^2}{mr^3} - Mg = \frac{L^2}{m}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0{}^3}\right) = \frac{-L^2}{mr^3r_0{}^3}\left[(r_0 + \Delta r)^3 - r_0{}^3\right] \cong \frac{-L^2}{mr_0{}^6} 3r_0{}^2 (r - r_0)$$

$$= \frac{-3L^2}{mr_0{}^4}\Delta r \tag{3}$$

相當於一彈簧的作用力，彈簧常數

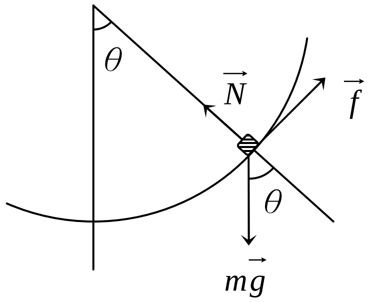
$$k = \frac{3L^2}{mr_0{}^4} \tag{4}$$

此系統以半徑的增減作簡諧運動。頻率平方為

$$\omega^2 = \frac{k}{m+M} = \frac{3L^2}{m(m+M)r_0{}^4} = \frac{3Mg}{(m+M)r_0}$$

《第四題》

當θ較小時，物體為等速率圓週運動，如下圖。



向心力 = $\vec{N}+\vec{f}+m\vec{g}$

在切線方向合力為 0，物體受圓筒的靜摩擦力

$$f = mg \cdot \sin\theta < \mu_s N \qquad (1)$$

物體向心力 = $\dfrac{mv^2}{r} = N - mg \cdot \cos\theta$ (2)

當θ加大，(2)式的$\cos\theta$變小，N 也變小。$\sin\theta$變大，使(1)式不再成立。物體在最高點

$$f = mg \cdot \sin\theta = \mu_s N \qquad (3)$$

$(2)\times\mu_s$ - (3)

$$\mu_s\left(\frac{mv^2}{r} + mg \cdot \cos\theta\right) = mg \cdot \sin\theta \qquad (4)$$

θ滿足上式後，物體會滑下。