100 學年度高雄市高級中學自然學科競賽複賽

物理科筆試試題參考解

【第一題】

一個車輪，半徑為 r，在距軸心 a 處(a<r)放置一小燈泡

(A)如圖一(a)所示，現在車輪以角速率ω沿著+x 方向純滾動不滑動前進，令$t=0$時其位置如圖所示，試求時間$t=t_0$時，燈泡的位置。(即其 x，y 座標)

(B)同(A)，但移動平面傾斜一個θ角，如圖 1(b)其餘條件不變，求時間$t=t_0$，燈泡的位置。(即其 x，y 座標)

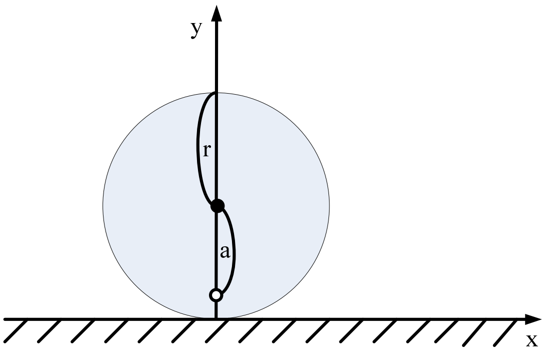


圖1a

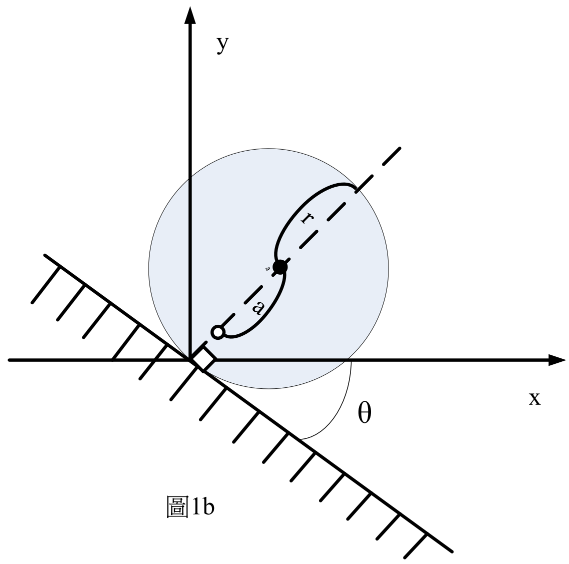


圖1b

【第一題答案】

(A)利用向量觀念及相對運動

$$
\begin{aligned}
x &= r\omega t_0 + a\cos(\frac{3}{2}\pi - \omega t_0) \\
&= r\omega t_0 - a\sin(\omega t_0) \\
y &= r + a\sin(\frac{3}{2}\pi - \omega t_0) \\
&= r - a\cos(\omega t_0)
\end{aligned}
$$

(B) 座標轉移

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$$
$$y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

其中$\begin{cases} x' = r\omega t_0 - a\sin(\omega t_0) \\ y' = r - a\cos(\omega t_0) \end{cases}$如(A)

$$\Rightarrow x = \left[r\omega t_0 - a\sin(\omega t_0)\right]\cos\theta + \left[r - a\cos(\omega t_0)\right]\sin\theta$$
$$y = -\left[r\omega t_0 - a\sin(\omega t_0)\right]\sin\theta + \left[r - a\cos(\omega t_0)\right]\cos\theta$$

【第一題答案】

【第二題】

質量為 m 之木塊靜止於質量為 M 之楔上，楔又靜止於桌面上，如圖 2 所示。假設所有表面均無摩擦。若開始時木塊之 P 點位於桌面高 h 距離，且為靜止。求木塊之 P 點接觸桌面時此楔之速度大小及它向左或向右移動的距離。

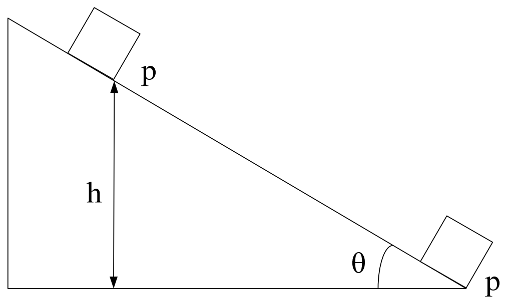
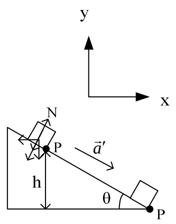


圖2

【第二題答案】

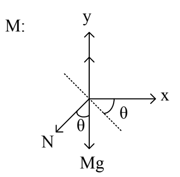
解一：力的模型



設楔的加速度為 $\vec{A} = -A\hat{i}$

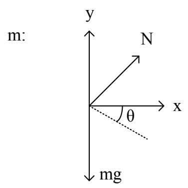
木塊相對於楔的加速度為 $\vec{a}' = a'\cos\theta\hat{i} - a'\sin\theta\hat{j}$

木塊相對於地的加速度為 $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} = (a'\cos\theta - A)\hat{i} - a'\sin\theta\hat{j}$



對楔的牛頓第二定律

$$\sum F_x = -N\sin\theta = M(-A) \Rightarrow N\sin\theta = MA \cdots (1)$$



對木塊的牛頓第二定律 $\sum F_x = N\sin\theta = m(a'\cos\theta - A) \cdots (2)$

$$\sum F_y = N\cos\theta - mg = m(-a'\sin\theta)$$

$$\Rightarrow mg - N\cos\theta = ma'\sin\theta \cdots (3)$$

由(1)得 $N = \dfrac{MA}{\sin\theta} \cdots (5)$

(5)代入(2)得 $MA = m(a'\cos\theta - A) \cdots (6)$

(5)代入(3)得 $mg - \dfrac{MA\cos\theta}{\sin\theta} = ma'\sin\theta \cdots (7)$

由(6)、(7)得

$$\boxed{\begin{aligned}&a'=\frac{(M+m)A}{m\cos\theta}=\frac{mg-\dfrac{MA\cos\theta}{\sin\theta}}{m\sin\theta}\\&\Rightarrow (M+m)A\sin^2\theta=mg\cos\theta\sin\theta-MA\cos^2\theta\\&\Rightarrow MA+mA\sin^2\theta=mg\cos\theta\sin\theta\\&\therefore A=\frac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m\sin^2\theta},a'=\frac{(M+m)}{M+m\sin^2\theta}g\sin\theta\#\#\end{aligned}}$$

假設楔靜止，則木塊 P 點從高 h 滑至底部$d=\dfrac{h}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2}a't^2$

$$\therefore t=\sqrt{\frac{2h(M+m\sin^2\theta)}{(M+m)g\sin^2\theta}}$$

$$\therefore V=-At=-\frac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}\sqrt{\frac{2h(M+m\sin^2\theta)}{(M+m)g\sin^2\theta}}=-\sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}$$

楔之速度大小為$\sqrt{\dfrac{2m^2gh\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}$方向向左##

$$S=\frac{1}{2}At^2=\frac{1}{2}\frac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}\frac{2h(M+m\sin^2\theta)}{(M+m)g\sin^2\theta}=\frac{mh\cos\theta}{(M+m)\sin\theta}\#\#$$

【第二題答案另解】

(a)木塊，楔為一系統則此系統在 x 方向動量守恆再應用力學能量守恆，求楔的速度 V

木塊相對於地的速度$\vec{v}=(v'\cos\theta-V)\hat{i}-(v'\sin\theta)\hat{j}$

x：動量守恆 $m(v'\cos\theta-V)-MV=0$　　$\therefore v'=\dfrac{m+M}{m\cos\theta}V\cdots(1)$

力學能量守恆

$$\boxed{\begin{aligned}&mgh=0+\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2+\frac{1}{2}MV^2\\&mgh=0+\frac{1}{2}m(\frac{m+M}{m\cos\theta}V\cos\theta-V)^2+\frac{1}{2}m(\frac{m+M}{m\cos\theta}V\sin\theta)^2+\frac{1}{2}MV^2\\&(\frac{(m+M)^2}{m^2\cos^2\theta}-\frac{2(m+M)}{m}+\frac{m+M}{m})V^2=2gh\end{aligned}}$$

$$\therefore V=\sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\theta}{(m+M)(M+m\sin^2\theta)}}\cdots(2)$$

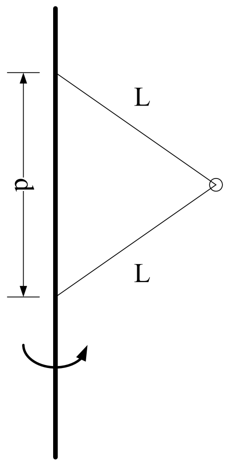
(b)淨力的 x 分量為零且開始系統為靜止，所以質心的 x 分量不變，假設楔向左移動 S 距

離

$$\boxed{\begin{aligned}&M(\frac{h}{2\tan\theta})=m(\frac{h}{\tan\theta}-S)+M(\frac{h}{2\tan\theta}-S)\\&S=\frac{mh}{(m+M)\tan\theta}\text{###}\end{aligned}}$$

【第三題】

如圖 3，一質量 m＝2 kg的球由兩條不計質量，長度為 L＝50 cm的繩索連結於一轉動的垂直軸。繩索綁在軸上相距 d=60 cm且繃緊的，下面繩索的張力 $T_L = 30N$。（假設重力加速度 $g = 10\,m/s^2$）



旋轉的軸

圖3

求

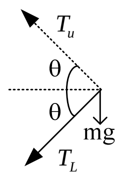
(a)上面繩索的張力 T_u ＝?

(b)兩繩的合力 $\vec{T}$ ＝?

(c)球的速率為何?

【第三題答案】

(a)



$$\boxed{\begin{aligned} & T_u \sin\theta - T_L \sin\theta - mg = 0 \\ & \sin\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \\ & T_u = \frac{190}{3} N(\text{或}63.3\text{N}) \end{aligned}}$$

(b)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{T} = \vec{T}_u + \vec{T}_L &= -(T_u\cos\theta + T_L\cos\theta)\hat{e}_r + (T_u\sin\theta - T_L\sin\theta)\hat{e}_z \\ &= -\frac{224}{3}\hat{e}_r + 20\hat{e}_z(\text{N}) \end{aligned}}$$

其中$\hat{e}_r$爲垂直於旋轉軸，由轉軸指向m的單位向量

$\hat{e}_z$爲平行於旋轉軸，指向上的單位向量

(c)

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{224}{3} = \frac{mv^2}{r}，r = 40\text{cm} = 0.4\text{m} \\ & \therefore v = \sqrt{\frac{224}{15}}\ \text{m/s}(\text{或}3.86\,\text{m/s}) \end{aligned}}$$

【第三題答案】

【第四題】

一半徑為 R，質量為 M 之球，以 v_0 之速度(質心速度)及ω_0之角速度開始在平面上滑動。如圖 4 所示。球與平面的動摩擦係數為μ_k。球對中心軸的轉動慣量為 $\frac{2}{5}MR^2$。當球只滾不滑(球與平面的接觸點暫時靜止)時，

(a) 寫出此時球的質心速度的大小和角速度的大小之關係。

(b) 畫出此時球的質心速度的方向和角速度的方向。

(c) 證明此時球的質心速度為 $v=\frac{5}{7}(v_0-\frac{2}{5}R\omega_0)$。

(d) 假設球只滾不滑後，球的速度不變。當 R=15 cm、M=4kg、v_0=8 m/s、ω_0=250 rad/s 及μ_k=0.1，則球從出發再回到出發點需時多久？(g=10 m/s^2)

(可能有用的公式 繞固定軸或通過質心的軸的轉動，力矩與角加速度之關係為 $\tau = I\alpha$。τ為力矩。I為轉動慣量。α為角加速度。)

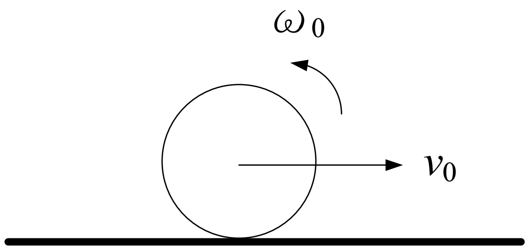
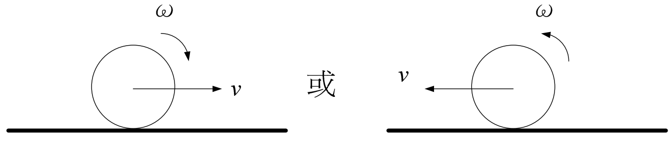


圖4

【第四題答案】

(a) $v=R\omega$ 或 $v=-R\omega$

(b)



(c) $f=Ma, a=\frac{f}{M}$

下頁續

【第四題答案】

(C) $\tau = I\alpha = Rf, \alpha = \dfrac{Rf}{\frac{2}{5}MR^2} = \dfrac{f}{\frac{2}{5}MR}$

$\omega = \omega_0 - \alpha t \cdots (1)$

$v = v_0 - at \cdots (2)$

只滾不滑：$v + R\omega = 0$

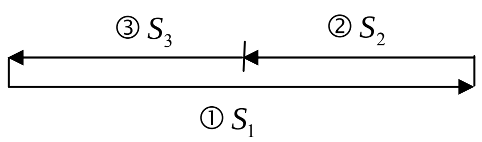
$v_0 - at + R(\omega_0 - \dfrac{f}{\frac{2}{5}MR}t) = 0$

$t = \dfrac{v_0 + R\omega_0}{\dfrac{f}{M} + \dfrac{f}{\frac{2}{5}M}} = \dfrac{2}{7}\dfrac{v_0 + R\omega_0}{\dfrac{f}{M}} \cdots (3)$

(3)代入(2) $\quad v = v_0 - \dfrac{f}{M}(\dfrac{2}{7}\dfrac{v_0 + R\omega_0}{\dfrac{f}{M}}) = \dfrac{5}{7}v_0 - \dfrac{2}{7}R\omega_0 = \dfrac{5}{7}(v_0 - \dfrac{2}{5}R\omega_0)\#\#$

(d)
$v_0 = 8\,{}^{m}\!/_{s} \quad , R = 15\,cm = 0.15m, \omega_0 = 250\,{}^{rad}\!/_{s}, \mu_k = 0.1$

$a = \dfrac{f}{M} = \dfrac{\mu_k Mg}{M} = 1m/s^2\ \#\#$



計算 路徑①的時間和位移

$0 = v_0 - at_1 \Rightarrow 0 = 8 - t_1 \therefore t_0 = 8s\#\#$

$0 = v_0^2 - 2aS_1 \therefore S_1 = 32m\#\#$

計算 路徑②的時間和位移

$v = \dfrac{5}{7}(v_0 - \dfrac{2}{5}R\omega_0) = \dfrac{5}{7}(8 - \dfrac{2}{5}\times 0.15 \times 250) = -5\,m/s$

$-5 = -at_2 \therefore t_2 = 5s\#\# \qquad (-5)^2 = 0 - 2aS_2 \therefore S_2 = -12.5m\#\#$

計算 路徑③的時間和位移

$S_3 = 32 - 12.5 = 19.5$

$t_3 = \dfrac{S_3}{v} = \dfrac{19.5}{5} = 3.9s$

$t = t_1 + t_2 + t_3 = 8 + 5 + 3.9 = 16.9s\#$