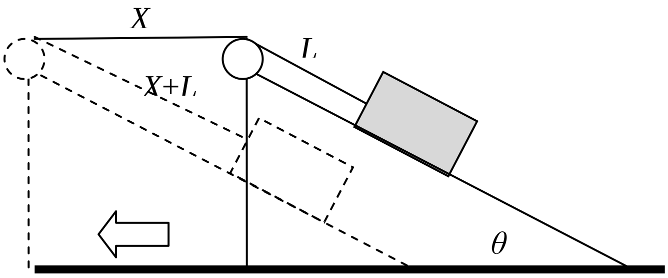
102 學年度台南區高級中學自然學科競賽複賽物理科筆試參考解

【第一題】

假設在釋放後，過一秒鐘斜面位置由實線圖走到虛線圖，即向左走了 X 距離



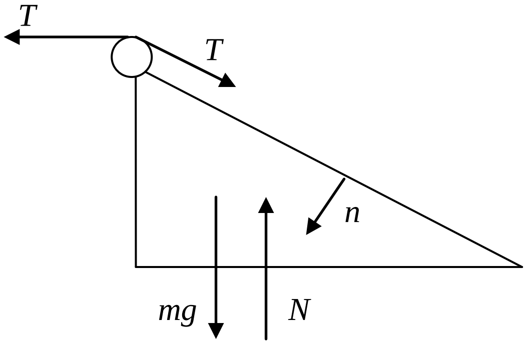
則物體位移如下(向左為 $\hat{x}$，向下為 $\hat{y}$)

$$\Delta x = X + L\cos\theta - (X+L)\cos\theta = X(1-\cos\theta)$$
$$\Delta y = (X+L)\sin\theta - L\sin\theta = X\sin\theta$$

初速為 0，接下來求出每秒的速度變化即為加速度

$$\therefore \begin{cases} 物體在\hat{x}方向加速度為X(1-\cos\theta) \\ 物體在\hat{y}方向加速度為X\sin\theta \\ 斜面在\hat{x}方向加速度為X \end{cases}$$

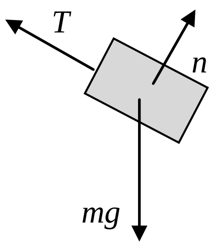
在受力方面斜面受力圖



$\therefore$ 斜面在 $\hat{x}$ 方向受力:

$T - T\cos\theta + n\sin\theta = 2mX$ ………式(1)

物體受力圖



$\therefore$ $\hat{x}$方向：

$T\cos\theta - n\sin\theta = mX(1-\cos\theta)$………式(2)

$\hat{y}$方向：

$mg - n\cos\theta - T\sin\theta = mX\sin\theta$………式(3)

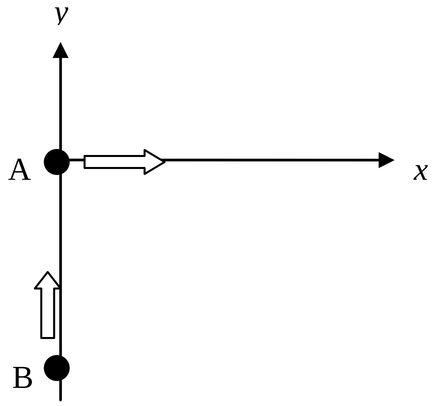
則由式(1)、式(2)、式(3)解得

$X = g\sin\theta/2(2-\cos\theta)$

【第二題】

(a) 假設 A 在原點，速度 v 往 $+\hat{x}$

B 在 y 軸$(-d)$位置，速度 v 往 $+\hat{y}$



則質心向量：

$$\vec{r}_{CM} = \frac{-3md\hat{y}}{m+3m} = \frac{-3d}{4}\hat{y}$$

質心速度：

$$\vec{v}_{CM} = \frac{mv\hat{x}+3mv\hat{y}}{m+3m} = \frac{v}{4}\hat{x}+\frac{3v}{4}\hat{y}$$

A 相對於質心的速度為

$$\vec{v}_A = v\hat{x}-\left(\frac{v}{4}\hat{x}+\frac{3v}{4}\hat{y}\right) = \frac{3v}{4}\hat{x}-\frac{3v}{4}\hat{y}$$

$$|v_A| = \frac{3\sqrt{2}}{4}v$$

B 相對於質心的速度為

$$\vec{v}_B = v\hat{y}-\left(\frac{v}{4}\hat{x}+\frac{3v}{4}\hat{y}\right) = \frac{-v}{4}\hat{x}+\frac{v}{4}\hat{y} \quad (\vec{v}_A:\vec{v}_B = 3:-1)$$

$$|v_B| = \frac{\sqrt{2}}{4}v \quad (|v_A|:|v_B| = 3:1)$$

後來成束縛態表示其總能量<0，∵能量守恆∴開始 E：

$$E = K_A+K_B+U$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}v\right)^2+\frac{1}{2}(3m)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}v\right)^2+\frac{k(q)(-q)}{d}$$

$$= \frac{3}{4}mv^2-k\frac{q^2}{d}<0$$

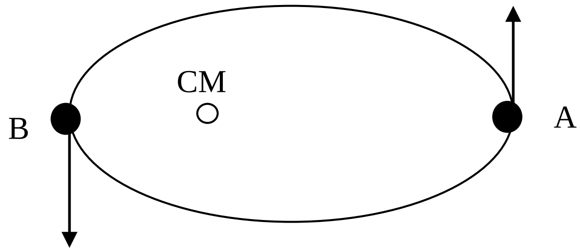
$$\therefore q > \sqrt{\frac{3dmv^2}{4k}} \quad (\text{令}q\text{大於}0)$$

(b) 開始時，角動量(相對於質心)為

$$\vec{l}=\underset{(\hat{y})}{\frac{3}{4}d}\times \underset{(\hat{x})}{m\cdot\frac{3}{4}v}+\underset{(\hat{y})}{\left(\frac{-1}{4}d\right)}\times \underset{(\hat{x})}{3m\left(\frac{-1}{4}\right)v}=\underset{(-\hat{z})}{\frac{3}{4}dmv}$$

後來形成橢圓軌道後(相對於質心)

如果 q 太大，兩物靜電吸力太強，將使兩物體的距離無法達到 $4d$，假設兩物距離最遠是 $4d$，如圖



此時 B 物體距質心 d，速率 v'，A 物體距質心 $3d$，速率 $3v'$ ，如此才能保持線動量為 0(守恆)，則此刻的角動量為

$$l'=3d\cdot m\cdot 3v'+d\cdot 3m\cdot v'=12dmv'$$

$\because$ 角動量守恆 $\therefore l=l'\Rightarrow v'=\frac{v}{16}$

此時總能量

$$E'=K_A'+K_B'+U'=\frac{1}{2}m(3v')^2+\frac{1}{2}(3m)v'^2+\frac{k(q)(-q)}{4d}$$
$$=6mv'^2-k\frac{q^2}{4d}$$

又 $E=E'$

$$\therefore 6mv'^2-k\frac{q^2}{4d}=\frac{3}{4}mv^2-k\frac{q^2}{d}$$
$$\Rightarrow \frac{31}{32}mv^2=k\frac{q^2}{d} \quad \Rightarrow q=\sqrt{\frac{31}{32}\frac{dmv^2}{k}}$$

題目是可到達 $4d$ 包含超過 $4d$ $\therefore q$ 小於 $\sqrt{\frac{31}{32}\frac{dmv^2}{k}}$

則兩物體最遠可大於 $4d$ $\therefore q$ 上限是 $q\le\sqrt{\frac{31}{32}\frac{dmv^2}{k}}$

【第三題】

(a) 由 65kg太空人受力思考，$ma_1 = \dfrac{Gm\times 72}{200^2} \Rightarrow a_1 = 1.20\times 10^{-13}$ (m/s^2)

由 72kg太空人受力思考，$ma_2 = \dfrac{Gm\times 65}{200^2} \Rightarrow a_2 = 1.08\times 10^{-13}$ (m/s^2)

$20 = \dfrac{1}{2}(1.20\times 10^{-13})t^2 + \dfrac{1}{2}(1.08\times 10^{-13})t^2 \Rightarrow t = 1.32\times 10^7$ (sec)=153(days)

(b) 隨著距離愈近受力愈大加速度愈大，時間會比之前的估算值還短。

所以想要更準確，如下把時間值計算出更準確的範圍來：

由 65kg太空人受力思考，$ma_3 = \dfrac{Gm\times 72}{180^2} \Rightarrow a_3 = 1.48\times 10^{-13}$ (m/s^2)

由 72kg太空人受力思考，$ma_4 = \dfrac{Gm\times 65}{180^2} \Rightarrow a_4 = 1.34\times 10^{-13}$ (m/s^2)

$20 = \dfrac{1}{2}(1.48\times 10^{-13})t^2 + \dfrac{1}{2}(1.34\times 10^{-13})t^2 \Rightarrow t = 1.19\times 10^7$ (sec) =138(days)

故知時間 t 的範圍為 138 天< t <153 天

(c) 20km/hr=5.56m/s

0.2kg物體若在 65kg太空人口袋中，丟出物體動量守恆使 65kg人獲得v_0的速度

$0.2\times 5.56 = 65\times v_0 \Rightarrow v_0 = 1.71\times 10^{-2}$ (m/s)

$20 = (1.71\times 10^{-2})t + \dfrac{1}{2}(1.20\times 10^{-13})t^2 + \dfrac{1}{2}(1.08\times 10^{-13})t^2$

$\Rightarrow 1.14\times 10^{-13}t^2 + 1.71\times 10^{-2}t - 20 = 0$

$\Rightarrow t = 1.17\times 10^3\text{(s)} = 19.5\text{(min)}$

亦即 65kg 人將物體朝兩人連線面向 72kg 人之正後方丟出，時程會縮短至 19.5 分鐘

【第四題】

(a) 由位移對時間的關係圖讀出

週期 $T = 2\times(9\text{-}1) = 16(\text{sec})$

頻率 $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{16}(\text{Hz})=0.0625(\text{Hz})$

振幅 $A=10.0(\text{cm})$

角頻率 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{16} = \dfrac{\pi}{8}(\text{rad/s})=0.393(\text{rad/s})$

(b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow 16 = 2\pi\sqrt{\dfrac{10/1000}{k}}$

求得彈力常數 $k = 1.54\times10^{-3}$(N/m)

(c) 位移對時間的函數為

$$x(t) = A\sin(\omega t+\phi) = -0.1\sin(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{8})(\text{m})$$

(d) 彈簧等分成三段後$k_1 = 3k$

並聯使用後整體之$k_2 = 3k_1 = 9k$

運動週期$T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_2}} \Rightarrow T' = \dfrac{T}{3}$

故運動頻率 $f' = 3f = \dfrac{3}{16}(\text{Hz})=0.1875(\text{Hz})$