

# 102 學年度高級中學自然學科競賽第七區複賽

## 物理科實驗試題第一題參考解

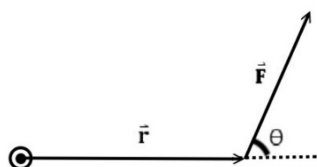
### 一、原理：

在物體施予作用力並使物體以支點或轉動軸為中心轉動之趨向，稱之為力矩；而受力點與支點之間的距離稱之為力臂。力矩的方向與力臂及作用力方向互相垂直。力矩 $\vec{\tau}$ 的數學意義為：

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

其大小 $\tau$ 為

$$\tau = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \theta$$



而本實驗是利用力矩平衡來求得盒子之質量。

以 O 點為支點，調整角度 $\theta$ 使盒子與水達到力矩平衡(如圖一)

$$W_b \sin \alpha \cdot l_1 = W_w \sin \beta \cdot l_2$$

$$W_b = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot W_w$$

(其中 $W_b$ 為盒重 $W_w$ 為水重、 $l_1$ 為水對系統造成之力臂、 $l_2$ 為盒對系統造成之力臂、 $\alpha$ 為重力方向和 $l_1$ 之夾角、 $\beta$ 為重力方向和 $l_2$ 之夾角)

設定盒子各頂點為 O、A、B、C，如圖二所示，當力矩平衡時，可得：

$$\cos \theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}$$

以 O 點為原點：

$$O = (0,0)$$

可得到：

$$A \text{ 點} = (-\overline{OA} \cos \theta, \overline{OA} \sin \theta) = \left(-\overline{OA} \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}, \overline{OA} \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}\right)$$

$$B \text{ 點} = (\overline{OB} \sin \theta, \overline{OB} \cos \theta) = \left( \overline{OB} \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}, \overline{OB} \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} \right)$$

$$\begin{aligned} C \text{ 點} &= (\overline{OB} \sin \theta - \overline{BC} \cos \theta, \overline{OB} \cos \theta + \overline{BC} \sin \theta) \\ &= \left( \overline{OB} \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} - \overline{BC} \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}, \overline{OB} \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} + \overline{BC} \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} \right) \end{aligned}$$

當盒子內加入水後呈現力矩平衡時，水在盒內形成三角形 OPQ

$$P \text{ 點} = (-\overline{OP} \cos \theta, \overline{OP} \sin \theta) = \left( -\overline{OP} \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}, \overline{OP} \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} \right)$$

$$Q \text{ 點} = (\overline{OQ} \sin \theta, \overline{OQ} \cos \theta) = \left( \overline{OQ} \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}, \overline{OQ} \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} \right)$$

有了這些座標可計算出盒子的質心  $M_b$  與水的質心  $M_w$  位置：

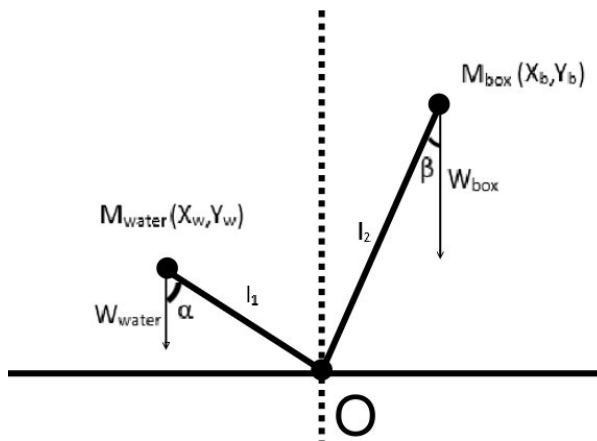
$$\begin{aligned} M_b &= \frac{O + A + B + C}{4} \\ &= \left( \frac{-\overline{OA} \cdot \overline{OP} + 2\overline{OB} \cdot \overline{OQ} - \overline{BC} \cdot \overline{OP}}{4\overline{PQ}}, \frac{-\overline{OA} \cdot \overline{OQ} + 2\overline{OB} \cdot \overline{OP} - \overline{BC} \cdot \overline{OQ}}{4\overline{PQ}} \right) \equiv (X_b, Y_b) \end{aligned}$$

$$M_w = \frac{(O + P + Q)}{3} = \left( \frac{-\overline{OP} \cdot \overline{OP} + \overline{OQ} \cdot \overline{OQ}}{3\overline{PQ}}, \frac{2\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{3\overline{PQ}} \right) \equiv (X_w, Y_w)$$

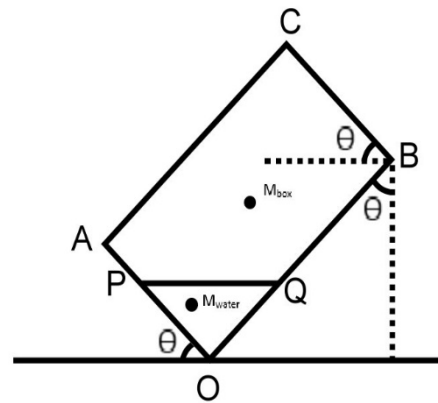
接著以質心座標分別求出  $l_1$ 、 $l_2$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  代回

$$W_b = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot W_w = W_w \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{|\overline{OQ} - \overline{OP}|}{\sqrt{|\overline{OB} \cdot \overline{OQ} - \overline{OA} \cdot \overline{OP}|}}$$

即可求得待測盒之重量。



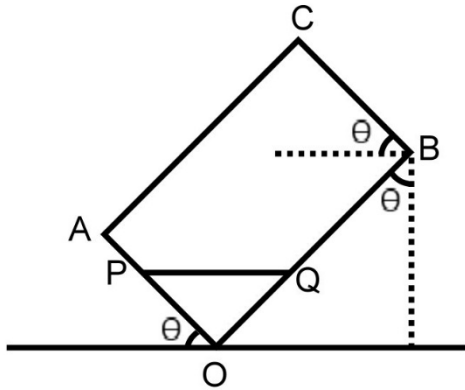
圖一



圖二

## 二、實驗步驟：

1. 以直尺測量待測盒邊長 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 。
2. 使用針筒取出已知重量的水加入待測盒中。
3. 將盒子以膠帶密封，避免漏水。
4. 如圖，以長尾夾輔助，將盒子以角 $\theta$ 立於桌上。
5. 記錄盒內水形成之三角形兩邊邊長 $\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 。
6. 重複步驟2~5取多組數據以重覆計算待測盒之質量。



## 三、實驗數據：

量測盒子各邊長：

$$\overline{OA} = 19.3(\text{cm})$$

$$\overline{OB} = 15.5(\text{cm})$$

量測水在盒內力矩平衡後形成之三角形邊長：

盒內水之體積	三角形邊長 $\overline{OP}$ (cm)	三角形邊長 $\overline{OQ}$ (cm)
50ml	5.95	4.90
100ml	7.90	6.75
150ml	9.45	8.25
200ml	10.65	9.50
250ml	11.65	10.60

#### 四、實驗結果：

水的重量 $W_w$ 為水的體積乘 $V_w$ 上其密度 $\rho_w$ ：

$$W_w = V_w \cdot \rho_w$$

其中

$$\rho_w = 1 \text{ gw/cm}^3$$
$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

再藉由公式：

$$W_b = W_w \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{|\overline{OQ} - \overline{OP}|}{\sqrt{\overline{OB} \cdot \overline{OQ} - \overline{OA} \cdot \overline{OP}}}$$

帶入實驗取得之 $\overline{OP}$ 、 $\overline{OQ}$ 和盒子兩邊長度 $\overline{OA}$ 和 $\overline{OB}$ 後計算可分別得到：

水體積	$W_b$ (gw)
50ml	161.9402985
100ml	143.5356763
150ml	166.5882353
200ml	169.0652075
250ml	162.2057905

將實驗得到之 5 組數據平均後可得到待測盒重實驗值為 160.67 gw，其在重力場  $g = 9.8$  時為 160.67 g，而藉由電子天平測量得到待測盒質量為 152.25 g，其誤差為：

$$\frac{160.67 \text{ g} - 152.25 \text{ g}}{152.25 \text{ g}} = 0.0553 = 5.53\%$$

#### 五、實驗分析與討論：

1. 實驗中若是待測盒中的水有洩漏，則難以確定加入水之重量，因此務必將盒子密封好。
2. 找平衡點時要注意盒中的水是否有保持靜止，否則可能會找到錯誤的平衡點。
3. 在記錄 $\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 時最好先記錄一邊後重新平衡，檢查是否紀錄正確後再記錄第

二邊，否則在紀錄時可能會破壞其平衡並影響實驗結果。

4. 記錄 $\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 時可以簽字筆在盒上標記位置，較不容易影響其平衡狀態。
5. 以針筒加水時須注意針筒內之氣泡，若有則需去除，否則難以確定加入水之重量。