102 年度高級中學數理及資訊學科能力競賽臺灣省第七區（彰雲嘉）複賽

物理科理論答案　　編號__________

本試題卷共 13 頁,請連同答案卷一起繳回

(一)

(1)在本題的答案卷上已繪出一個薄透鏡(圖 1-1)，其焦距為 f，兩焦點分別為 F 與 F'。有一物，其高度為 h_o，位於鏡前，與 F 的距離為 x。請利用薄透鏡的成像作圖法，直接在答案卷的圖上定出像的位置與大小。設此像高度為 h_i，與 F' 的距離為 x'，試利用你所繪的成像圖，證明 $xx'=f^2$。(6 分)

(2)在本題的答案卷上已繪出一個薄凸透鏡與一個薄凹透鏡(圖 1-2)，兩者的焦點分別為 F_1 與 F_2。在薄凸透鏡的鏡前有一物。請利用薄透鏡的成像作圖法，直接在答案卷的圖上定出像的位置與大小。(6 分)

解：

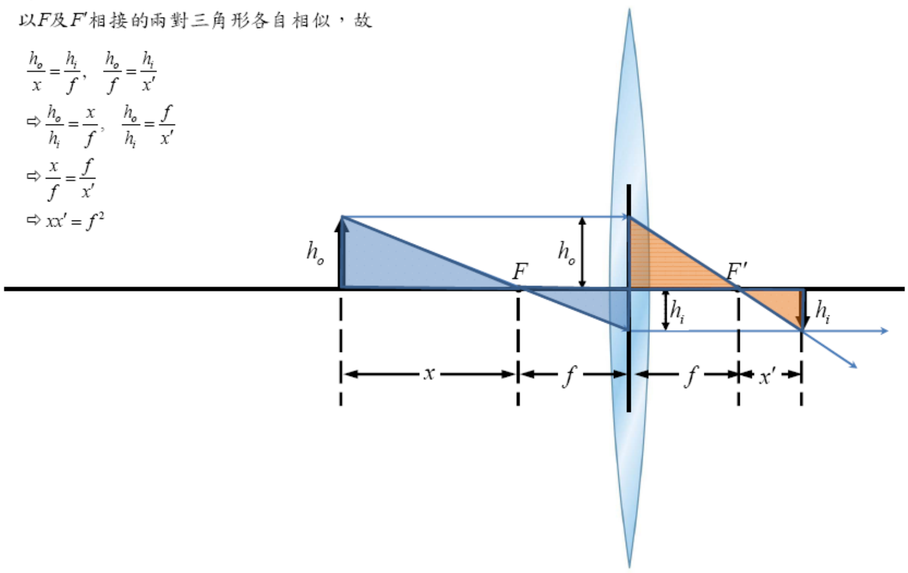
以 F 及 F' 相接的兩對三角形各自相似，故

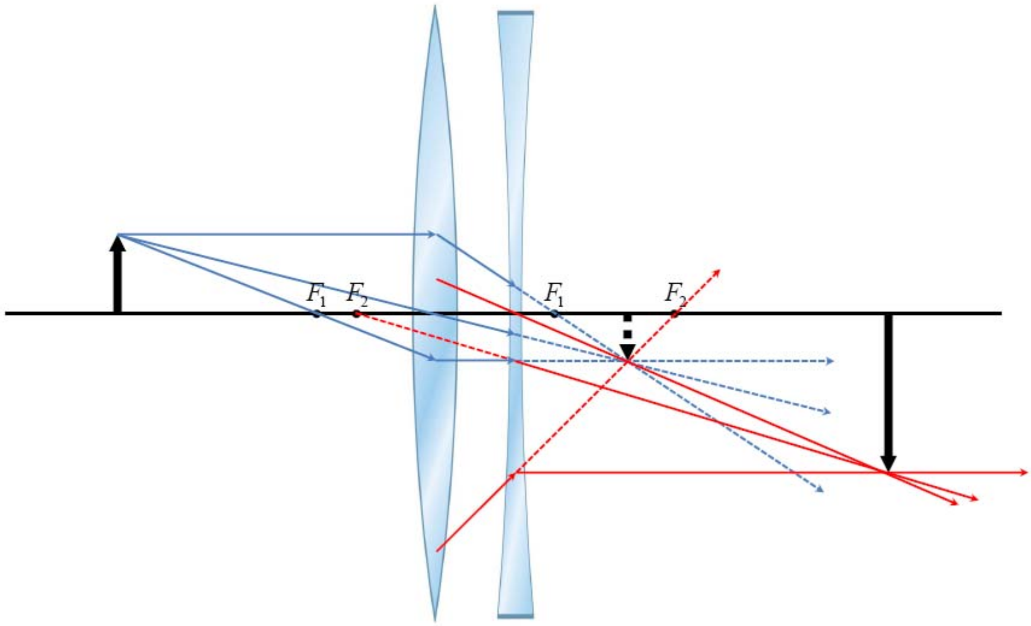
$\frac{h_o}{x}=\frac{h_i}{f}$, $\frac{h_o}{f}=\frac{h_i}{x'}$

⇨ $\frac{h_o}{h_i}=\frac{x}{f}$, $\frac{h_o}{h_i}=\frac{f}{x'}$

⇨ $\frac{x}{f}=\frac{f}{x'}$

⇨ $xx'=f^2$





F_1
F_2
F_1
F_2

(二)

有一個開口水槽置於高度為 d 的水平桌面上，如圖 2 所示。今在距離水面深度為 h 處鑿一小孔，讓水由小孔水平射出，噴到地面。假設在水噴射的過程中維持水槽內水位高度為 H，試回答下列問題：

(1)水由小孔噴出至地面時，著地點距水槽邊緣之水平射程 x 為何? (4 分)

(2)如果調整鑿孔的位置，使得水柱著地點離水槽邊緣之水平射程 x 最大，此時小孔距離水面深度 h 應為何? (5 分)

(3)接上小題，此時水柱著地點離水槽邊緣的最大射程 x 為何? (5 分)

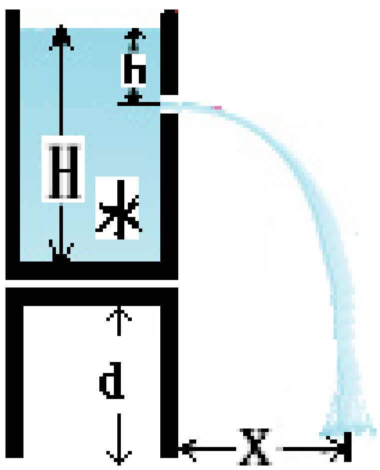


圖 2-1

解：

Sol: 設水流出時液面下降的速度 $V \ll \upsilon$(題目定 H≈固定)水密度ρ重力加速度g大氣壓力 p_o

a) 由 Bernoulli 方程式

$p_o + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_o + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \quad V \ll \upsilon$

$\therefore \rho g h \cong \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \therefore \upsilon \cong \sqrt{2gh}$

由小孔到地面的時間 t

y =(H-h)+d= $\frac{1}{2} g t^2$

$\therefore$t= $\sqrt{\frac{2[(H-h)+d]}{g}}$

水平射程 $\chi = \upsilon$ t= $\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2[(H-h)+d}{g}}$ = $\sqrt{4h[(H-h)+d}$ =2$\sqrt{h(H-h+d)}$

b) 最大射程

$\chi_{\max}$ =2 $\sqrt{-h^2 + hH + dh}$

$= 2\sqrt{-h^2 + (H+d)h}$

=2 $\sqrt{-[h-(\frac{H+d}{2})]^2 + (\frac{H+d}{2})^2}$

$\therefore$當 h= $\frac{H+d}{2}$ 時 $\chi_{\max}$ 有最大値，但(h ≤ H) 故 d≤ H才成立

故若 d> H 則h = H

另 Sol:由 $\frac{dx}{dh}$ =0⇒ h = $\frac{H+d}{2}$ (當 d≤H)，h =H(當 d>H)

c) $\chi_{\max}$ =2 $\sqrt{(\frac{H+d}{2})^2}$ =H+d (當 d≤H)，

$\chi_{\max} = 2\sqrt{Hd}$ (當 d>H)

(三)

一質量 m 的物體 1 附著於一彈簧末端作簡諧運動，如圖 3 所示。物體 1 的位置與時間的關係為 $x = A\cos(\omega t)$，其中 $x = 0$ 為彈簧未變形處，A 為振幅而 ω 為振盪的角頻率。今有質量為 $m/2$ 的物體 2 以速率 $v = 2\omega A$ 向物體 1 靠近，在時間 $t = \theta/\omega$ 時兩物體發生彈性碰撞，假設撞擊時間遠小於振盪週期，因此可以忽略不計。若地板為一光滑平面，並且彈簧質量太小可忽略不計，求碰撞後物體 1 運動的振幅與週期。(數學公式：$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$)(14 分)

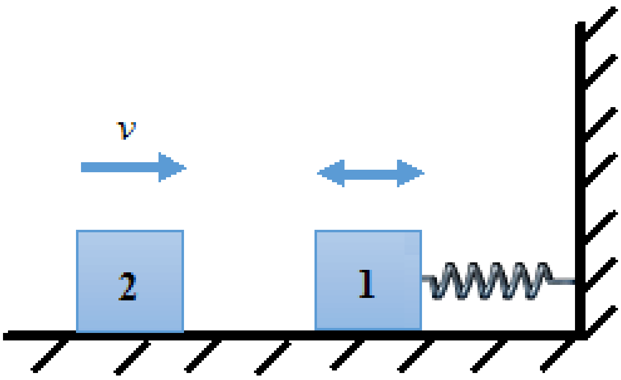


圖 3

解：

2013/10

According to Newton's second law $\Delta p = I = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt\, F$

$\because$ F is finite and $\Delta t \to 0$ $\therefore$ $I = 0$

$\Rightarrow \Delta p = 0$, i.e. momentum conservation

$\frac{m}{2}v_2 + m v_1 = \frac{m}{2}v_2' + m v_1'$ $\qquad v_1 = -v\sin\theta$, $v_2 = 2v$, $v = \omega A$

$\Rightarrow v_1' + \frac{1}{2}v_2' = v(1-\sin\theta)$ —(1)

$\because$ elastic collision

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_2^2+\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_2'^2+\frac{1}{2}mv_1'^2$$

$$\Rightarrow \quad v_1'^2+\frac{1}{2}v_2'^2=v^2(2+\sin^2\theta) - ②$$

Using Eq ① to eliminate v_2' : $v_2'=2[v(1-\sin\theta)-v_1']$

Inserting this into Eq. ②

$$\Rightarrow 3v_1'^2-4v(1-\sin\theta)v_1'-v^2\sin\theta(4-\sin\theta)=0$$

$$\Rightarrow v_1'=\frac{4-\sin\theta}{3}v,\quad \cancel{-v\sin\theta}\ (=v_1)$$

Let $\bar{A}$ be the new amplitude

Then $\frac{1}{2}k\bar{A}^2=\frac{1}{2}mv_1'^2+\frac{1}{2}kA^2\sin^2\theta \quad (k=m\omega^2)$

$$\Rightarrow \bar{A}=\sqrt{\left(\frac{v_1'}{\omega}\right)^2+A^2\sin^2\theta}=\frac{1}{3}A\sqrt{15-8\sin\theta-8\sin^2\theta}$$

#

Let $\bar{\omega}$ be the new frequency

$$\bar{\omega}=\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega \ \#$$

(四)

(1)圖 4-1 為光線入射厚度為 t 的平板所造成的折射現象。該平板是由色散物質所製成，光通過該色散物質之折射率與光波長的關係如圖 4-2 所示。如果在入射角度為 60°的情況下，要精準從點 B 射到點 A，則光射出平板的位置要在光射入平板的位置的下方 d 處，其中 d 與厚度 t 的關係為 $t=\sqrt{3}d$。問需要使用何種波長的光？(7 分)

(2) 求入射光與出射光的垂直距離(兩平行光之距離)。 (7 分)

Solution:

(1)

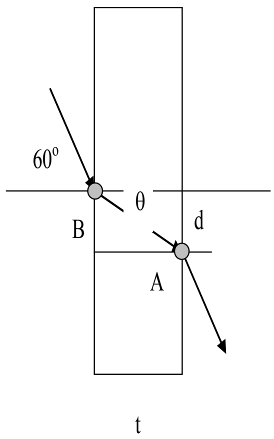


圖 4-1

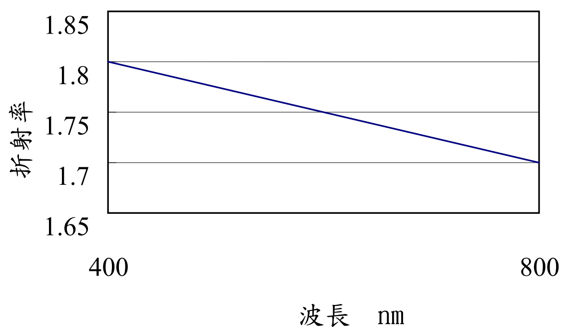
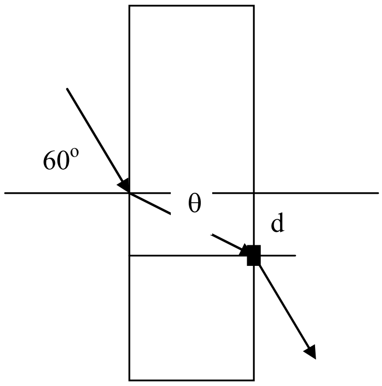


圖 4-2

(1)入射光的角度爲 60 度，依據 Snell law $1\cdot\sin 60 = n\sin\vartheta$

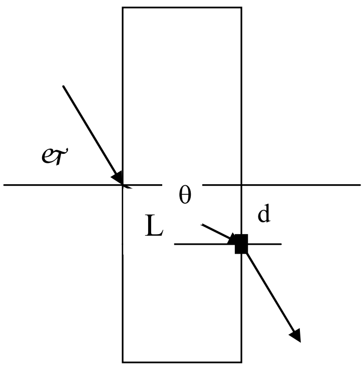


$$\tan\vartheta = \frac{d}{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \theta = 30^{o} \qquad n = \frac{\sin 60^{0}}{\sin 30^{0}} = \sqrt{3} \approx 1.732$$

由附圖二 折射率與波長之關係　　波長 x，折射率 y

$y - 800 = 4000(1.7 - x)$　x=1.732,　y=672nm　　　入射波長爲 672nm

(2)



$1 \cdot \sin\varphi = n \sin\vartheta$　BA 兩點長度爲 L，兩道光的垂直距離爲 k

$L = \dfrac{t}{\cos\theta}$　　$k = L \cdot \sin(\varphi - \theta)$

(or　$k = t\dfrac{\sin\phi\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2 \sin^2\phi} - \cos\phi\dfrac{\sin\phi}{n}}{\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2 \sin^2\phi}}$　)

φ=60°　$\theta = 30^{\circ}$代入　　$k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}t$

(五)

一名潛水員從 14.0 公尺深的海底釋出直徑 3.00 公分（球形）的空氣氣泡。假定當時海水的溫度從表面到海底均為 298 K，且假定氣泡內空氣為理想氣體。令海水的密度為 1000 kg/m^3 。試回答下面問題:

(1)氣泡到達海面時的直徑為何？（3 分)

(2)畫出氣泡到達海面過程中的 PV 圖。(3 分)

(3)氣泡上升到表面的過程中，應用熱力學第一定律，計算

(a)空氣所作的功 (3 分)

(b)氣泡內能的變化 (3 分)

(c)熱流入氣泡或流出氣泡的大小 (3 分)

(可參考的數字：一大氣壓 $= 1.013\times10^5$ N/m^2, ln(2) = 0.69315, ln(3) = 1.0986)

解：

(1)氣泡被釋放的壓力是

$$P_1 = P_2 + \rho gh$$

$$= 1.013\times10^5\ \frac{N}{m^2} + \left(1.00\times10^3\,\frac{kg}{m^3}\right)\left(9.80\ \frac{m}{s^2}\right)(14.0\ m)$$

$$= 2.39\times10^5\ \frac{N}{m^2}$$

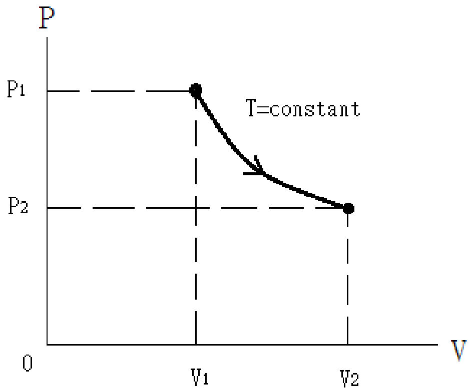
從理想氣體狀態方程

$$P_1V_1 = P_2V_2\ ;$$

$$\left(1.013\times10^5\ \frac{N}{m^2}\right)\frac{4}{3}\pi R_2^{\ 3} = \left(2.39\times10^5\ \frac{N}{m^2}\right)\frac{4}{3}\pi(1.50\ cm)^3,$$

得 $R_2 = 2.00\ cm$, 因此直徑是 $\boxed{4.00\ cm}$

(1)



(3)在等溫過程中所作的功

$$W\int PdV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = nRT\ \ln\frac{V_2}{V_1} = nRT\ln\frac{R_2^3}{R_1^3} = 3P_1V_1\ln\frac{R_2}{R_1}\ ,$$

$$P_1V_1 = nRT.$$

$$W = 3\left(2.39\times10^5\frac{N}{m^2}\right)\left[\frac{4}{3}\pi(1.50\times10^{-2}\ m)^3\right]\ln(\ 2.00\ cm/1.50\ cm)$$

$$= \ \ 2.92\ \mathrm{J}.\#$$

因為溫度是恆定的

$\therefore\quad \Delta U = 0\ \#.$

使用熱力學第一定律，流入的熱為

$\Delta U = Q - W$

$0 = Q - 2.92\ \mathrm{J}\ ,$

$$Q = 2.92\ \mathrm{J}\ \#$$

(六)

有一個圓盤，半徑為 R，質量為 m，其轉動慣量為$\frac{1}{2}mR^2$，放在兩條相距為 $2R$ 的輸送帶上方，輸送帶正好分別碰觸到圓盤的兩端。兩條輸送帶的速度皆為 v，但方向相反，如圖 5 所示。設圓盤與輸送帶的摩擦係數為 μ。請回答下列問題：

(1)輸送帶在運作時將圓盤放下，使圓盤從靜止開始運動。一段時間後，圓盤達到最終轉速後，此時圓盤的角速度是多少？ (4 分)

(2)承上題，求圓盤在放下後，從靜止到終端轉速所需的時間。 (5 分)

(3)承上題，如果把右邊的輸送帶速度從 v 調高到為 $2v$，則在此系統再度平衡後，圓盤的運動狀態為何？ (6 分)

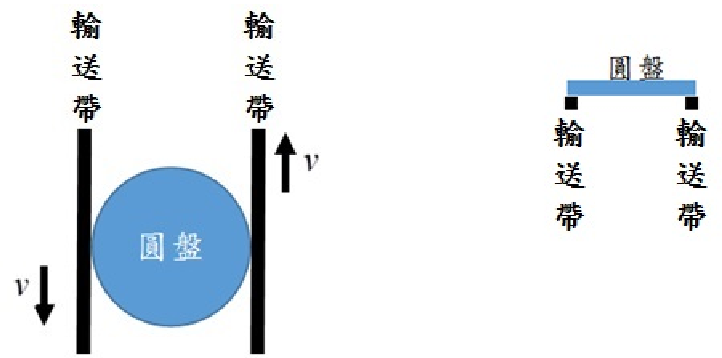


圖 5 左圖為俯視圖，右圖為順著輸送帶的側視圖。

解：

(1) $v = R\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \dfrac{v}{R}$

(2)力矩 $N = \mu mgR$，角加速度 $\alpha = \dfrac{\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2} = \dfrac{2g\mu}{R}$，所需時間 $t = \dfrac{\omega}{\alpha} = \dfrac{v}{2g\mu}$

(3) 設最終運動狀態為 速度 u，角速度 ω

且 $u + R\omega = 2v$， $u - R\omega = -v$

可得到 $u = \frac{1}{2}v$， $\omega = \dfrac{3v}{2R}$

(七)

一總質量為 m 的太空船沿半徑為 R 的圓形軌道繞月球運行。為使太空船能在月球上登陸，故從太空船上沿軌道切向方向，向前發射一質量為 m_1 的物體，使得太空船在發射物體後，繼續繞月球運行，經過 180° 後恰好以切向接觸月球表面。已知月球的質量為 M_{m} 半徑為 R_{m}，萬有引力常數為 G，求：

(1)m_1 的發射速度 v_1。(8 分)

(2)從發射物體到太空船抵達月球所經過的時間。(8 分)

解:

(1)設太空船做圓周運動時的速度為 v,

$$\frac{mv^2}{R}=\frac{GmM_m}{R^2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_m}{R}}$$

設太空船發射物體後的速度為 v_2,

由動量守恆:

$$mv=m_1v_1+(m-m_1)v_2$$

設太空船在登陸月球時的速度為 v_3,

發射後,由太空船的力學能守恆及角動量守恆:

$$\frac{1}{2}(m-m_1)v_2^2-\frac{G(m-m_1)M_m}{R}=\frac{1}{2}(m-m_1)v_3^2-\frac{G(m-m_1)M_m}{R_m}$$

$$(m-m_1)v_2R=(m-m_1)v_3R_m$$

$$\Rightarrow v_2=\sqrt{\frac{2GM_mR_m}{R(R+R_m)}}$$

$$\Rightarrow v_1=\frac{mv}{m_1}-\frac{m-m_1}{m_1}v_2=\frac{m}{m_1}\sqrt{\frac{GM_m}{R}}-\frac{m-m_1}{m_1}\sqrt{\frac{2GM_mR_m}{R(R+R_m)}}$$

(2)設 T_1, T_2 分別為做圓周運動與橢圓運動時的週期,由克卜勒第三定律:

$$\frac{T_1^2}{R^3}=\frac{T_2^2}{\left[\frac{1}{2}(R+R_m)\right]^3}\Rightarrow T_2=\sqrt{\left(\frac{R+R_m}{2R}\right)^3}T_1$$

$$T_1=\frac{2\pi R}{v}=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_m}}\Rightarrow T_2=\pi\sqrt{\frac{\left(R+R_m\right)^3}{2GM_m}}$$

從太空船發射物體到太空船登陸月球所經過的時間為半個週期,

$$\Rightarrow t=\frac{1}{2}T_2=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\left(R+R_m\right)^3}{2GM_m}}$$