102學年度高級中學自然學科競賽第10區複賽

物理科筆試試題參考解

1.質量為m的子彈以初速v_0，沿水平方向入射一質量為 2 m，長度為L的木塊。若起始時木塊靜置於一光滑水平面上，當子彈射穿木塊時，其速率減為初速的一半，則子彈在木塊內所受的平均阻力為何? (5%) ；又當子彈剛穿出時，木塊總共滑行了多少距離? (5%) 。

參考解:

設木塊被子彈射穿後速度為 v，由動量守恆定律可得

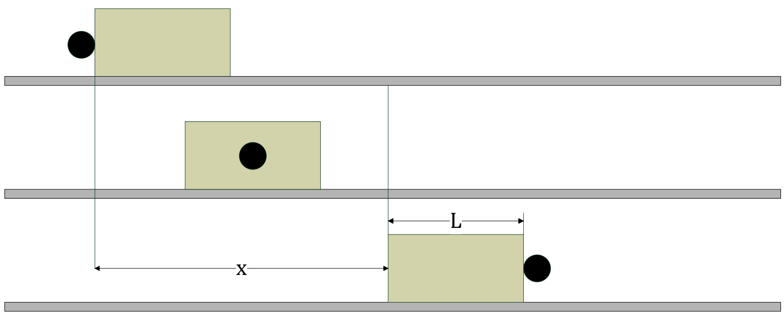
$$mv_0 = m \times \frac{v_0}{2} + (2m) \times v$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{4} v_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

設子彈剛射出木塊時，木塊自靜止開始滑行的距離為 x，子彈在木塊內所受的平均阻力為 f，則阻力對子彈所作的負功，等於子彈動能的減少量。

參考下圖，可知子彈在受力期間所行經的總位移為$x + L$。就子彈而言，由功能定理可得

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -f \times (x + L) \cdots\cdots\cdots (2)$$



根據牛頓第三運動定律，子彈受有木塊給予的阻力，因此木塊受有一同大的反作用力，但與阻力的方向相反。此反作用力作正功，使木塊自靜止加速，就木塊而言，木塊受力所經的位移為 x，同樣由功能定理可得

$$\frac{1}{2}(2m)v^2 - 0 = f \times x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

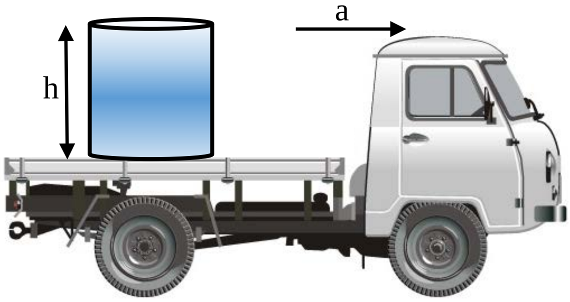
將(1)和(3)兩式代入(2)式可解得

$$f = \frac{5mv_0^2}{16L} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

將(1)和(4)兩式代入(3)式可解得

$$x = \frac{L}{5}$$

2.如圖所示，車上載有一裝滿水的圓柱形水箱，水箱被妥善固定於車上，水箱高度為 h，內半徑為 r，外半徑為 R。當車子在水平地面上以加速度 a 前進時，水箱內最多可容納多少體積的水? (10%) 。



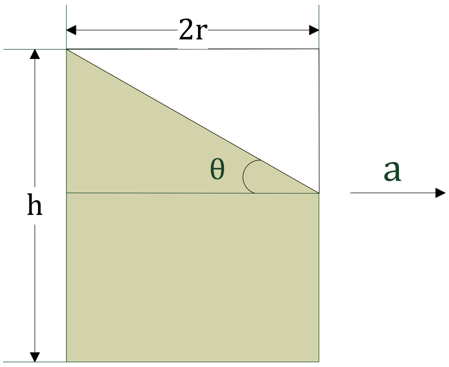
參考解:

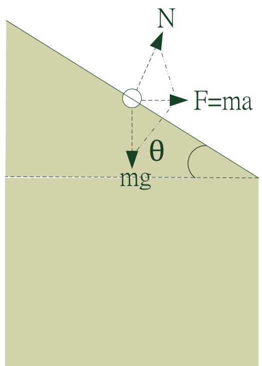
當水箱車以加速度 a 前進時，箱內水面和水平面之間的夾角為 θ。假想水面上有一質量為 m 的小質點，則其受力情形如下右圖所示。mg 為該質點所受的重力，N 為水面作用於該質點的正向力，此兩力的合力 F 使該質點得以加速度 a 前進。由圖上的幾何關係可得

$$tan\theta = \frac{F}{mg} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

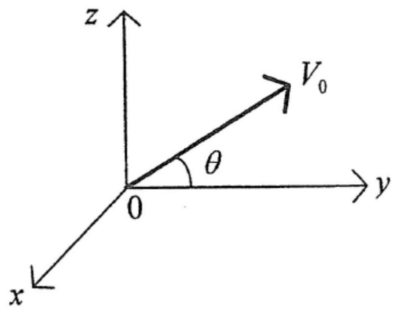
水箱內所能容納的水體積為

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{2}\pi r^2(2rtan\theta) = \pi r^2(h - r\,a/g)$$





3.如圖所示，x-y為水平地面，一質點從原點O處沿y-z面以初速v_0角度θ斜向拋出。設重力在負z方向（即鉛直向下）。此質點自拋出後，受一沿正x方向之定力F。設此質點之質量為m，重力加速度為g，則此質點落地時，其位置座標(x , y , z)為何? (5%) ；落地時的動能較拋出時增加多少?(5%) 。



參考解:

全程飛行時間$t = \frac{2v_0 sin\theta}{g}$

$$\therefore x = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t^2 = \frac{(2Fv_0^2\ sin^2\theta)}{mg^2}$$

$$y = (v_0 cos\theta)t = \frac{v_0^2 sin2\theta}{g}$$

$$Z = 0$$

落地時所增加的動能為 F 力所作的功，所以

$$\Delta(K.E.) = Fx = \frac{2F^2v_0^2 sin^2\theta}{mg^2}$$

或由下式算出:

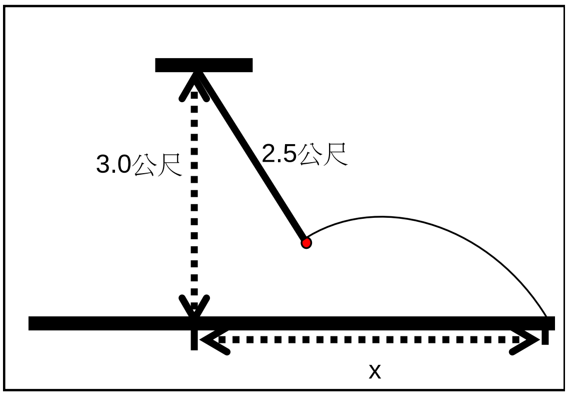
$$\Delta(K.E.) = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{F}{m}\right)^2\left(\frac{2v_0 sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{2F^2v_0^2 sin^2\theta}{mg^2}$$

$$\left(\frac{2Fv_0^2 sin^2\theta}{mg^2}, \frac{v_0^2 sin2\theta}{g}, 0\right)_{\#}$$

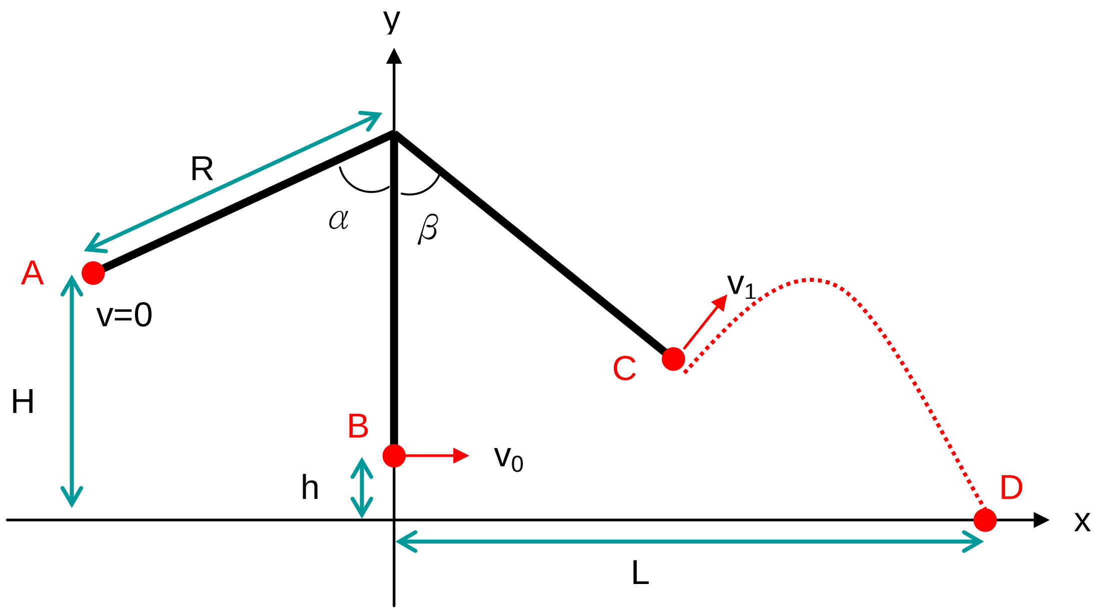
$$\frac{2F^2v_0^2\ sin^2\theta}{mg^2}{}_{\#}$$

【第四題】

有一鞦韆上端懸於離地 3.0 公尺之高處，鞦韆長 2.5 公尺。若有一小朋友盪鞦韆之高度可達 2.0 公尺，請問若他從鞦韆上躍下後，水平位移 x 之最大值為何?



參考解:



假設一小朋友從 A 點處盪下來，經過最底點 B 點，然後在 C 點躍下，最後在 D 點著地。虛線為其躍下軌跡，此軌跡之座標可寫成：

(1)
$$x(t) = R\sin\beta + (v_1\cos\beta)\cdot t$$
$$y(t) = h + R(1-\cos\beta) + (v_1\sin\beta)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

假設小朋友自 C 點躍下至著地點 D 所需時間為 T，則 $x(T) = L,\ y(T) = 0$

因此，

(2)
$$L = R\sin\beta + (v_1\cos\beta)\cdot T$$
$$0 = h + R(1-\cos\beta) + (v_1\sin\beta)\cdot T - \frac{1}{2}gT^2$$

將(2)式中之 T 消去，可將 L 表示為：

(3)

$$L = R\sin\beta + \frac{v_1^{\ 2}\sin\beta\cos\beta}{g} + \sqrt{(\frac{v_1^{\ 2}\sin\beta\cos\beta}{g})^2 + \frac{2v_1^2\cos^2\beta[h+R(1-\cos\beta)]}{g}}$$

其中 v_1 為 β 之函數，可利用能量守恆寫出其關係式：

(4) $mgH = mg[h+R(1-\cos\alpha)] = mg[h+r(1-\cos\beta)] + \frac{1}{2}mv_1^2$

上式可簡化成

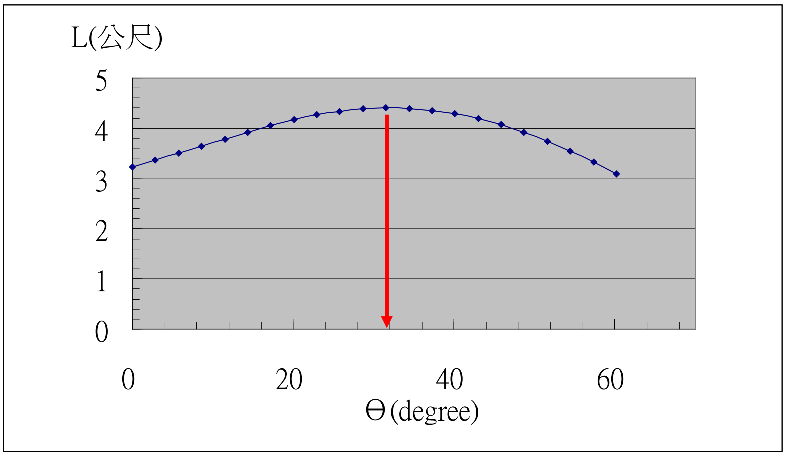
(5) $\frac{v_1^2}{g} = 2R(\cos\beta - \cos\alpha)$

由式(5)代入式(3)中，可得

(6)

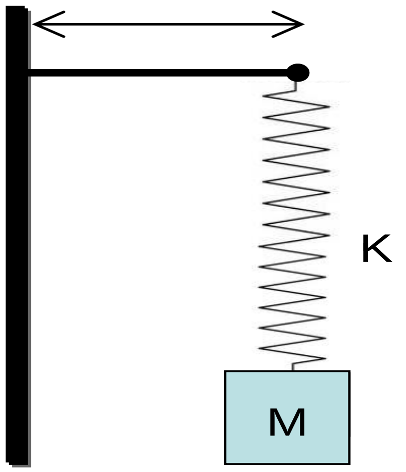
$$L = R\left(\sin\beta + (\cos\beta-\cos\alpha)\sin 2\beta + 2\cos\beta\sqrt{(\cos\beta-\cos\alpha)[(\cos\beta-\cos\alpha)\sin^2\beta + \frac{h}{R} + (1-\cos\beta)]}\right)$$

其中 $R = 2.5m, h = 0.5m, \cos\alpha = \frac{1}{2.5}$。將 L 對 β 角作圖，可得出 L 最大值出現在 $\beta \cong 32^0$，$L(\beta = 32^\circ) \cong 4.4m$，如下圖所示。



【第五題】

有一彈性懸桿(長度 L)左端固定於牆壁。一彈性係數為 K 之彈簧懸掛於懸桿之右端點，一質量為 M 之物體繫於彈簧之下端。若物體 M 之上下振動週期為 T，試估計懸桿之彈性係數(忽略懸桿與彈簧之質量)。



參考解:

假設細懸桿之質量很小可忽略不計，其彈性係數為k_{sd} .

此系統可等效為串聯彈簧系統，則其等效彈性係數k_{eff}可寫成

(1) $\dfrac{1}{k_{eff}} = \dfrac{1}{k_{sd}} + \dfrac{1}{k}$

此時物體 M 以週期 T 上下震盪，因此

(2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k_{eff}}}$

將式(1)代入(2)可得

(3) $k_{sd} = \dfrac{4\pi^2 kM}{kT^2 - 4\pi^2 M}$