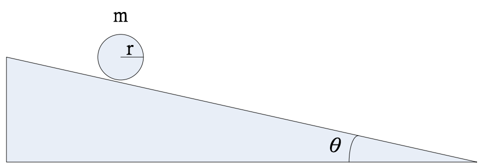
103學年度臺灣省高級中等學校數理及資訊學科能力競賽第6區複賽
物理科筆試試題參考解

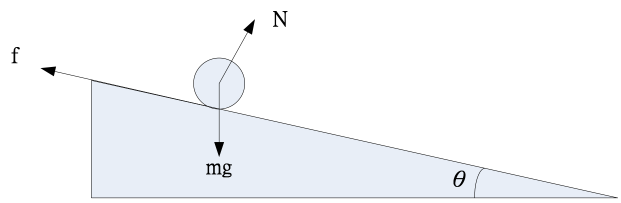
【第一題】如圖，一質量為 m，半徑為 r 的均勻圓球沿一個與水平面夾角為θ的斜坡平穩滾動 (沒有滑動)。重力加速度為g



(a) 繪出圓球上所有作用力的力圖。
(b) 試求圓球平穩滾動狀況下，沿斜坡的加速度大小為何。
(c) 試求滾動圓球與斜面間的摩擦力大小為何。

【第一題解答】

參考解：
(a)



(b) $m \cdot g \cdot sin\theta - f = m \cdot a$ ·······································① a為沿斜坡加速度

又 $r \cdot f = I \cdot \alpha = I \cdot \dfrac{a}{r} \rightarrow f = I\dfrac{a}{r^2}$ ··················② α 為角加速度；I 為圓球轉動慣量

由①,② 得 $a = \dfrac{g \cdot \sin\theta}{1+\frac{I}{m \cdot r^2}}$ ································③

又均勻圓球 繞球心旋轉$I = \dfrac{2}{5}m \cdot r^2 \rightarrow a = \dfrac{5}{7}g \cdot sin\theta$

(c) 將③代入① $f = m \cdot g \cdot \sin\theta - m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin\theta \dfrac{(\frac{I}{m \cdot r^2})}{(1+\frac{I}{m \cdot r^2})} = \frac{2}{7}m \cdot g \cdot \sin\theta$

【第二題】有三顆完全相同非導體球(質量為 m)，其上帶有相同且均勻分布的電量。將其中兩顆球固定在一絕緣細棍子的兩端點上(棍子的質量不計)，並將第三顆球置於原來兩球之間且可以自由的移動(沒有摩擦力)，如圖所示。現將整個系統放置於一無摩擦的平面上，且一開始的時候三個帶電球的相對位置如圖所示。放手後，中間帶電非導體球的最快速率可達多少? 當到達最快速率時，中間帶電球從原來位置移動了多少的距離（包括方向）?(設靜電力常數為 k)

參考解:

因為均勻分布的非導體球可以設想為點電荷，質量設為m電荷為q
當放手後中間的電荷會加速往中間移動，當到達中間時開始受另一邊電荷的斥力而減速，也就是說在中間時的速度最大如下圖

所以

動量守恒 $mv_1 = 2mv_2$

能量守恒 $\dfrac{kq^2}{3d} + \dfrac{kq^2}{d} = \dfrac{1}{2}mv_1^2 + \dfrac{1}{2}2mv_2^2 + \dfrac{2kq^2}{2d}$

帶入後解出

$v_1 = \dfrac{2q}{3}\sqrt{\dfrac{k}{md}}$ (a)

這系統為一個獨立系統，所以質心位置不動

原來的質心位於(設最左邊球位置為原點 x = 0)

$$\mathrm{X(cm)} = \frac{(3md + 4md)}{3m} = \frac{7d}{3}$$

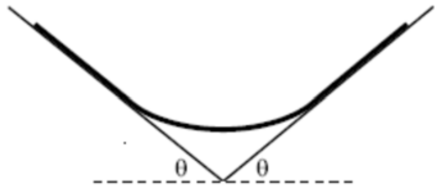
移動後

$$\frac{7d}{3} = ((mx') + m(x' + 2d) + m(x' + 4d))\Big/_{3m} = x' + 2d$$

$x' = d/3$（最左邊的球的新位置） 中間球的新位置 $x' + 2d = \frac{7d}{3}$

所以移動了$3d - \frac{7d}{3} = \frac{2d}{3}$ （往左）

【第三題】 一條質量均勻分佈的繩子放置在兩傾斜相同角度的斜面上，如圖所示，繩子與斜面間的靜摩擦係數為１，且整個系統為左右對稱。若在希望整條繩子在斜面上達到平衡的時候，沒有與斜面接觸的部分（即懸空部分）與整條繩子的比率達到最大，則在哪一角度下可以達到此要求？此最大比率為多少？



參考解：

設繩子質量為 m，而設懸空的部份為全部的比率為 x.

若只考慮一半(右半邊)則其重(向下)$mg\left(\frac{x}{2}\right) = Tsin\theta$

T 是繩子在接觸點沿斜面方向的張力

所以 $T = \frac{mg(\frac{x}{2})}{sin\theta}$

而右半邊的繩子重量(放置在右半邊斜面的繩子部分) $= \frac{(1-X)mg}{2}$

則接觸面上的正向力為$N = (1-x)\left(\frac{mg}{2}\right)cos\theta$

所以其摩擦力為$F = (1-x)\left(\frac{mg}{2}\right)cos\theta$ (沿斜面方向) 因為摩擦係數為 1

當達到淨力平衡時

$(1-x)\left(\frac{mg}{2}\right)cos\theta = (1-x)\left(\frac{mg}{2}\right)sin\theta + x\frac{mg}{2}sin\theta$(全轉為沿斜面方向) (1)

$$x = \frac{f(\theta)}{(1+f(\theta))} \quad ,f(\theta) = cos\theta sin\theta + sin^2\theta \qquad (2)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(cos2\theta + sin2\theta - 1)$$

當 f(θ)最大時 F 為最大值

所以 對 f(θ)一次微分為 0 時 x 最大

也就是說$\cos 2\theta - \sin 2\theta = 0$或是$\tan 2\theta = 1$時 x 最大

也就是說 θ=22.5 度 x 最大

帶入(2)

x(max) = $\sqrt{2}-1 / \sqrt{2}+1 = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ ~0.172

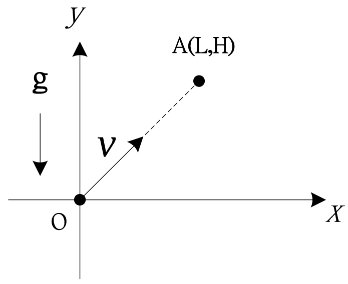
【第四題】 (3 %)一位具有絕對音感能力的音樂家站在路上，發現當他利用一長 5.5 公尺且兩端開口的中空管可產生駐波聲響的最低音符為 $B_0(f = 31Hz)$。一輛音響超大聲的車子沿著公路等速向他靠近時，他注意到這個熟悉的音樂中有一個音符原本應該是 G($f = 392\ Hz$)，但現在卻聽起來像 A($f = 440\ Hz$)，則車子移動的速率為何？(單位：$^{m}/_{s}$)

參考解：兩端開口中空管產生最低頻率駐波聲響時，管長等於二分之一波長，意即波長為 11m，所以聲波$v = f \cdot \lambda = 31 \times 11 = 341(^{m}/_{s})$

關於移動中波源速度u的聲音都卜勒效應：$f' = \frac{f}{1 \pm {}^{u}/_{v}}$

由於波源在接近之中$\Rightarrow u = v\left(1 - \frac{f}{f'}\right) = (341\,^{m}/_{s})\left(1 - \frac{392H_z}{440H_z}\right) = 37.2\,^{m}/_{s}$

【第五題】位於座標原點的一小球以v的速度瞄準座標為(L,H)的 A 點發射，發射的瞬間同時有另一小球從 A 點自由落下：

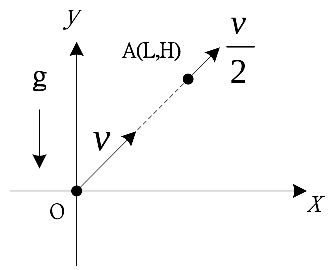


(a) (2 %)若兩球於座標(L,0)處碰撞，請問小球的發射速度V為何？(以 g,L,H 表示)

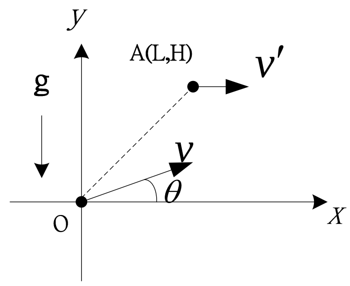
(b) (2 %)若發射速度為v_B時，碰撞處之座標為(L,$\frac{2}{3}H$)，若發射速度為v_c時，碰撞處之座標為(L,$\frac{1}{3}H$)，請問v_B是v_c的幾倍？

(c) (2 %)若發射速度減小至(a)小題發射速度v的$\frac{1}{\sqrt{3}}$倍，請問兩球碰撞處之座標為何？

(d) (3 %)位於座標原點的一小球以v的速度瞄準座標為(L,H)的 A 點發射，發射的瞬間在 A 點同時有另一小球往同方向以$\frac{v}{2}$的速度發射出去，請問兩球碰撞處的座標為何？(以 g,L,H, v表示)



(e) (6 %)位於座標原點的一小球，不再瞄準座標為(L,H)的 A 點，改以與 x 軸夾θ角並以v速度發射，發射之瞬間在 A 點同時有另一小球以v'的速度水平發射(+x 方向)。若v'為v的$\frac{3\sqrt{3}}{8}$倍，且兩球碰撞處的 x 座標為 4L，請問θ角為幾度？



(f) (6 %)承(e)小題，原點小球(質量為 m)從開始發射到碰撞其動能變化量為何？(限以 m,g,H, v表示)

參考解

(a) 解(一)：

A 點小球的位移$-\mathrm{H} = \frac{1}{2}(-g)t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

原點小球的 x 方向位移$\mathrm{L} = (v\cos\theta)\mathrm{t} \Rightarrow v = \frac{L}{\frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}} \times \sqrt{\frac{2H}{g}}} = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{2H}}$

解(二)：

原點小球的 y 方向位移$0 = (v\sin\theta)t \Rightarrow t = \frac{2v\sin\theta}{g}$

原點小球的 x 方向位移 L$= (v\cos\theta)t \Rightarrow t = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{gL}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{gL}{2\frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}}\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}} = \frac{g(L^2+H^2)}{2H} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{2H}}$$

解三：

原點小球的 x 方向位移 L= $(v cos\theta)t \Rightarrow t = \frac{L}{v cos\theta}$

原點小球的 y 方向位移$r_y = (v sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow r_y = v sin\theta \frac{L}{v cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v^2 cos^2\theta}$$

$$= H - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v^2 \frac{L^2}{L^2+H^2}} = H - \frac{1}{2} g \frac{L^2+H^2}{v^2}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} g \frac{L^2+H^2}{v^2} = H - r_y \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{2(H-r_y)}}$， 當 $r_y = 0$ 時$, v = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{2H}}$

解四：

A 點小球的位移$-$H $= \frac{1}{2}(-g)t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

原點小球 y 方向的位移$0 = (v sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{2v sin\theta}{g}$

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{2v sin\theta}{g} \Rightarrow \frac{2H}{g} = \frac{4v^2 sin^2\theta}{g^2} \Rightarrow v^2 = \frac{gH}{2sin^2\theta} = \frac{gH}{2\frac{H^2}{L^2+H^2}} = \frac{g(L^2+H^2)}{2H}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{2H}}$$

(b) 解(一)：發射速度為v_B時,L $= (v_B cos\theta)t_B \Rightarrow t_B = \frac{L}{v_B cos\theta}$

A 點小球至碰撞處的位移$-\frac{H}{3} = \frac{1}{2}(-g)t_B^2 \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$

$\frac{L}{v_B cos\theta} = \sqrt{\frac{2H}{3g}} \Rightarrow v_B = \frac{L}{\frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}}} \times \sqrt{\frac{3g}{2H}} = \sqrt{\frac{3g(L^2+H^2)}{2H}}$

發射速度為v_c時,$\frac{L}{v_c cos\theta} = \sqrt{\frac{4H}{3g}} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{3g(L^2+H^2)}{4H}}$

$\Rightarrow v_B$是v_c的$\sqrt{2}$倍

解(二)：由(a)小題之解三，可得知 $v_B = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{2\left(H-\frac{2}{3}H\right)}}$ $, v_c = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{2\left(H-\frac{1}{3}H\right)}}$

$\Rightarrow v_B$是v_c的$\sqrt{2}$倍

解(三)：A 點小球至碰接處的位移在發射速度v_B時是v_c時的$\frac{1}{2}$,

所以t_B是t_c的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍

原點小球的 x 方向位移都是 L，所以$v_B cos\theta$是$v_c cos\theta$的$\sqrt{2}$倍，即v_B是v_c的$\sqrt{2}$倍

(c)

解(一)：發射速度$\frac{v}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{6H}}$

$$t = \frac{L}{\frac{v}{\sqrt{3}}cos\theta} = \frac{L}{\sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{6H}}\frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}}} = \sqrt{\frac{6H}{g}}$$

$\Rightarrow r_y = \left(\frac{v}{\sqrt{3}}sin\theta\right)t - \frac{1}{2}gt^2 = \sqrt{\frac{g(L^2+H^2)}{6H}} \times \frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}} \times \sqrt{\frac{6H}{g}} - \frac{1}{2}g\frac{6H}{g}$=-2H

⇒碰撞處座標為(L,-2H)

解(二)：發射速度為原來的$\frac{1}{\sqrt{3}}$倍，發射速度之 x 分量亦為原本的$\frac{1}{\sqrt{3}}$倍，因原點小球的 x 方向位移都是 L，所以碰撞時間會是原來的$\sqrt{3}$倍，對 A 點小球而言，其位移就會是原來的 3 倍(-3H)⇒碰撞處座標為(L,H-3H)，即(L,-2H)

(d) 碰撞時，原點小球在 x 方向的位移$r_x = v_x t = L + \frac{v_x}{2}t \Rightarrow t = \frac{2L}{v_x}$且$r_x = 2L$

碰撞時，原點小球在 y 方向的位移$r_y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = vsin\theta\frac{2L}{vcos\theta} - \frac{1}{2}g\frac{4L^2}{v^2\frac{L^2}{L^2+H^2}}$

$$= 2H - \frac{2g(L^2+H^2)}{v^2}$$

⇒碰撞處座標為$(2L, 2H - \frac{2g(L^2+H^2)}{v^2})$

(e) 碰撞時原點小球在 x 方向的位移$4L = (vcos\theta)t \Rightarrow t = \frac{4L}{vcos\theta}$

$$\Rightarrow 4L = L + \frac{3\sqrt{3}}{8}v \cdot t = L + \frac{3\sqrt{3}}{8}v\frac{4L}{vcos\theta}$$

$$\Rightarrow 3L = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{L}{cos\theta} \Rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^o$$

(f) 碰撞時與發射時的動能變化量

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}m(v_{fx}^2 + v_{fy}^2 - v_{ix}^2 - v_{iy}^2) = \frac{1}{2}m(v_{fy}^2 - v_{iy}^2)$$

從發射到碰撞所經過的時間$t = \frac{4L}{v_x} = \frac{4L}{\frac{\sqrt{3}}{2}v} = \frac{2H}{v}$

$$v_{fy} = v_{iy} - gt = \frac{v}{2} - \frac{2gH}{v}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{fy}^2 - v_{iy}^2) = \frac{1}{2}m(v_{fy} + v_{iy})(v_{fy} - v_{iy}) = \frac{1}{2}m(v - \frac{2gH}{v})(-\frac{2gH}{v})$$

$$= \frac{2mg^2H^2}{v^2} - mgH = mgH(\frac{2gH}{v^2} - 1)$$