

物理科筆試試題參考解

《第一題》

(a) 吹氣對吹箭所做的功 = 吹箭增加的動能

$$F_0 \cdot \ell = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{其中 } F_0 \text{ 為吹箭所受定力，} v_0 \text{ 為吹箭離開吹管的速率，}$$

$$\text{且有 } v_0 = \sqrt{2F_0\ell/m}$$

$$\text{根據自由落體等加速落下運動 } h = \frac{1}{2}gT^2,$$

$$\text{得吹箭離開吹管落至地面的時間 } T = \sqrt{2h/g}$$

$$R_0 = v_0 \times T = \sqrt{2F_0\ell/m} \times \sqrt{2h/g} = \sqrt{4F_0\ell h/mg}$$

根據上式結果，當吹氣推進力 F_0 增強為 $1.5 F_0$ ，吹箭離開吹管後到落地之間的水平位移會變成原來的 $\sqrt{1.5}$ 倍。

(b) 由題意知 $F(x) = F_0 - bx \quad 0 \leq x \leq l$

吹氣對吹箭所做的功 = 吹箭增加的動能

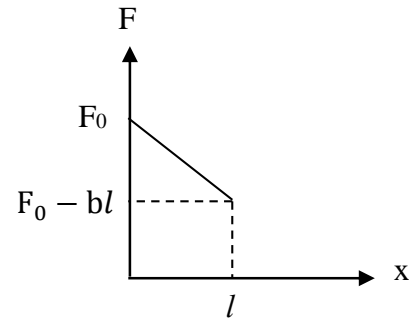
$$F \cdot \ell = \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ 現在 } F \text{ 不是定力，但正比於水平位移}$$

逐漸減少，可以由平均力乘以位移，或計算右圖函數圖與

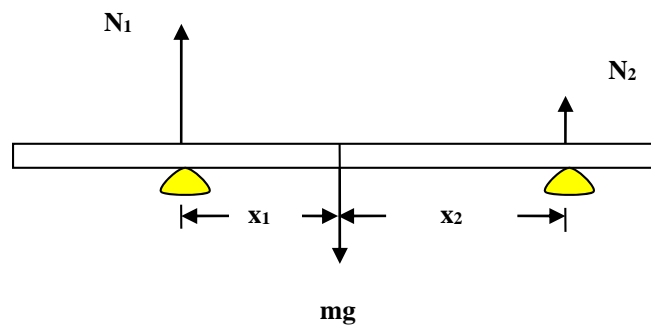
$$x \text{ 軸所夾的面積計算，得做功為 } \frac{1}{2}(2F_0 - bl) \cdot \ell = \frac{1}{2}mv_0^2$$

重覆上小題的計算，吹箭離開吹管後到落地之間的水平位移變成

$$R_0 = v_0 \times T = \sqrt{(2F_0 - bl)\ell/m} \times \sqrt{2h/g} = \sqrt{2(2F_0 - bl)\ell h/mg}$$



《第二題》



依照題意，力圖分析如上。

設左、右兩手食指開始的位置距質心處分別為 x_1 、 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ 。棍子重量為 mg ，兩手食指給棍子向上的之支撐力為 N_1 、 N_2 。

一開始還沒開始移動：

棍子處於靜力平衡的狀態，會滿足，合力為零，合力矩為零，關係如下。

$$\text{合力為零} \Rightarrow N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\text{合力矩為零} \Rightarrow N_1 x_1 - N_2 x_2 = 0$$

由上式可得 $N_1/N_2 = x_2/x_1$ ，

也就是靠近質心比較近的食指受力比較大， $N_1 > N_2$ 。

兩手開始向質心移動：

若兩手食指移動的力量小於手指和棍子之間的最大靜摩擦力時，食指無法移動。繼續增加移動的力量，當大於最大靜摩擦力時食指開始移動。

根據摩擦力與正向力成正比的性質，兩邊的最大靜摩擦力 F_1 、 F_2 會因為 $N_1 > N_2$ ，造成 $F_1 > F_2$ ，所以右端食指會先開始向質心移動，一直到 x_2 變成比 x_1 小時，此時支撐力大小因為力臂的改變，變成 $N_1 < N_2$ ，進而造成 $F_1 < F_2$ ，就換成左端食指。如次永遠都是遠端移動，形成自動調整直到質心相碰為止。看起來好像是棍子神奇指引自動自發地找到重心正確的位置。

《第三題》

將力標示於圖中，如果處於靜力平衡，則

$$N_1 + F_2 = 2Mg, \quad N_2 = F_1.$$

且

$$F_1 \leq \mu N_1, \quad F_2 \leq \mu N_2.$$

另外在金屬板彎曲點的力矩和等於零，所以

$$N_1 L/2 = (Mg + N_2) L/2.$$

從以上的方程式可知

$$F_1 + F_2 = Mg$$

$$F_2 \leq \mu F_1.$$

$$F_1 \leq \mu Mg/(1 - \mu).$$

求最小靜摩擦係數，則上式改成等號

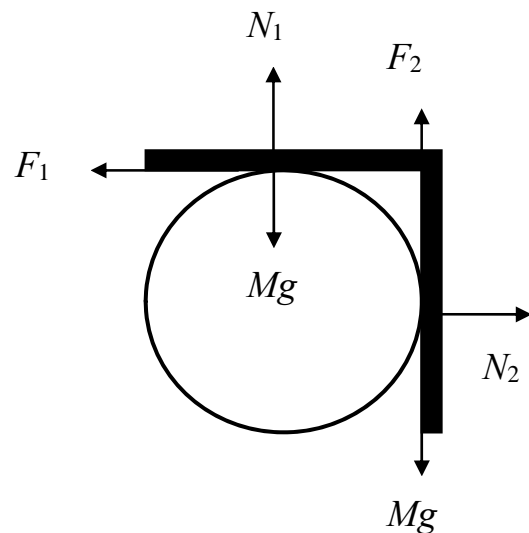
$$F_1 + F_2 = Mg$$

$$F_2 = \mu F_1.$$

$$F_1 = \mu Mg/(1 - \mu).$$

因此解上式得

$$\mu = \sqrt{2} - 1.$$



《第四題》

(a) 假設物體的速度為 v ，則

向心加速度

$$g \sin\theta = \frac{v^2}{L-D}$$

所以

$$v^2 = g \sin\theta (L-D)$$

另外由於能量守恆

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(L-D)(\sin\theta + 1) = mgL$$

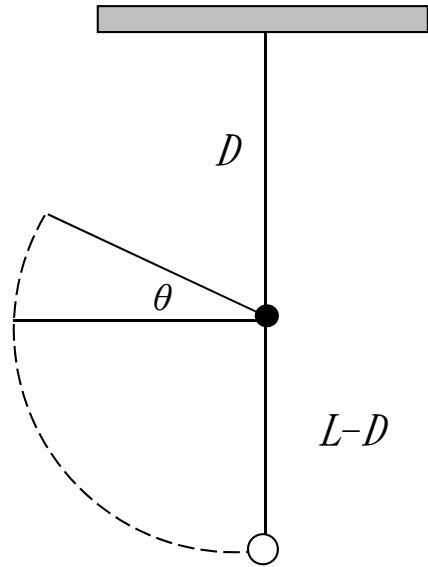
所以

$$v^2 = 2g[D - (L-D)\sin\theta]$$

因此

$$g \sin\theta (L-D) = 2g[D - (L-D)\sin\theta]$$

$$\Rightarrow D = 3L \sin\theta / (2 + 3 \sin\theta)$$



(b) 細繩斷裂後，物體沿拋物線軌跡，

$$x = v \sin\theta t, \quad y = v \cos\theta t - gt^2/2.$$

當物體落到釘子所在位置的水平線時

$$y = -(L-D)\sin\theta$$

所以

$$-(L-D)\sin\theta = v \cos\theta t - gt^2/2$$

$$\Rightarrow t = (v \cos\theta + \sqrt{v^2 \cos^2\theta + 2g(L-D)\sin\theta}) / g$$

$$x = v \sin\theta (v \cos\theta + \sqrt{v^2 \cos^2\theta + 2g(L-D)\sin\theta}) / g,$$

$$\text{當 } \theta = 30^\circ, \sin\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{所以 } D = 3/7 L, \quad v^2 = 2/7 g L,$$

$$x = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{14} L < (L-D)\cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{14} L$$

$$\text{所以在左邊，距釘子 } \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{14} L$$