103 年度高級中學數理及資訊學科能力競賽臺灣省第三區（中投區）複賽

物理科理論試題

編號___________

本試題共 6 頁,請連同答案卷一起繳回

題目	配分	得分
第一題	12 分	
第二題	16 分	
第三題	12 分	
第四題	12 分	
第五題	12 分	
第六題	12 分	
第七題	12 分	
第八題	12 分	
合計(100 分)		

(一)12 分

有一圓柱形筒內盛滿了水(如圖 1)。

若圓筒的截面積為 A 高為 H,而在圓筒頂部下方距離 h 的地方,開有一小孔,截面積為 S。假設 $S<<A$,所以水位在穩定下降過程中不會產生湍流。若水位下降時,液面的速率為 v_2,忽略水的黏滯性,但不忽略液面下降速度的前提下,試問

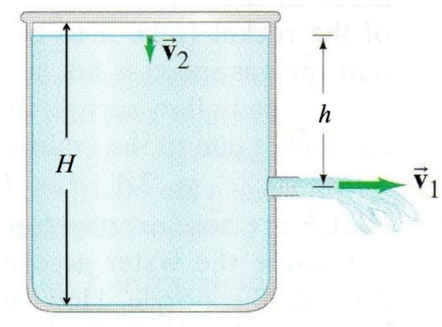


圖 1

(1)水柱由下方開口處噴出的速率 v_1?
(2)水位下降對時間的變化率,dh/dt?
(3)由滿水位下降至水位高度 $H/4$ 所需的時間?

[解答]

(1) From Bernoulli's eq.

$$P_2+\frac{1}{2}\rho{v_2}^2+\rho g y_2=P_1+\frac{1}{2}\rho{v_1}^2+\rho g y_1$$

since

$$P_1=P_2\,,v_2A=v_1S\,,h=y_2-y_1$$

$$\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{S}{A}\right)^2}}=\sqrt{2g}\gamma\sqrt{h}\ ,\gamma=\left[1-\left(\frac{S}{A}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

(2) v_1 varies with h, when h $\rightarrow$ h−dh during dt

$$\Rightarrow -\mathrm{A}dh=v_1Sdt=\sqrt{2g}\gamma S\sqrt{h}dt$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt}=-\sqrt{2g}\gamma\frac{S}{A}\sqrt{h}=-\sqrt{2g}\gamma\beta\sqrt{h}\,,(\beta=\frac{S}{A})$$

(3)

$$\frac{dh}{\sqrt{h}}=-\sqrt{2g}\gamma\beta dt$$

$$\Rightarrow \mathrm{dt}=-\frac{1}{\sqrt{2g}\gamma\beta}\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{t}=-\sqrt{\frac{2}{g}\frac{1}{\gamma\beta}}\sqrt{h}\,\Big|_{\frac{3H}{4}}^{0}=\sqrt{\frac{1}{2g}\frac{1}{\gamma\beta}}\sqrt{3H}=\frac{1}{\gamma\beta}\sqrt{\frac{3H}{2g}}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2 - S^2}{S^2}} \sqrt{\frac{3H}{2g}}$$

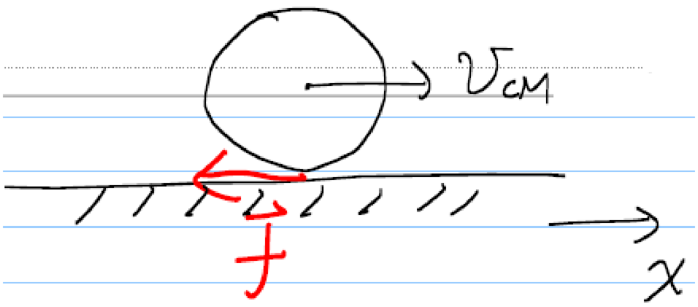
(二)16 分

一質量 m 半徑 R 的球，以初速 v 在一水平面上滑動，球與該平面間的動摩擦係數為 μ ，由於摩擦力的關係，球會開始轉動，並且滑動的速率會漸漸減小，在某一時刻，球會停止滑動，開始平滑的滾動。令地表的重力加速度為 g，球對通過球心的轉動軸之轉動慣量為 $\frac{2}{5}mR^2$

(1)球滑動的時間有多久？
(2)球滑動的距離有多長？
(3)球停止滑動而開始滾動的那一瞬間，球的質心的速率為何？
(4)在球滑動期間，摩擦力做功多少？

[解答]

Acording to Newton's second law , we have:



$f = -\mu mg = m a_{CM}$
$\Rightarrow a_{CM} = -\mu g \Rightarrow v_{CM}(t) = v + a_{CM}t = v - \mu gt$
More over ,

$$\tau = -\mu mgR = I_{CM}\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$$

$\omega(t) = \alpha t = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t$, $\omega > 0$ if countclockwise rotation

When the ball rolls without sliding ,

$$v_{CM}(T) = -R\omega(t) \Rightarrow v - \mu gT = \frac{5}{2}\mu gT$$

$$\Rightarrow T = \frac{2}{7}\frac{v}{\mu g} \text{ (ans)}$$

$$\Delta x = vt + \frac{1}{2} a_{CM} t^2 = vt - \frac{1}{2} \mu g t^2$$

Inerting t = T

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{12}{49} \frac{v^2}{\mu g} (ans)$$

$$v_{CM}(T) = v - \mu g T = \frac{5}{7} v (ans)$$

Following from the work-energy theorem ,

$$W_s = \Delta K = \frac{1}{2} m v_{CM}{}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

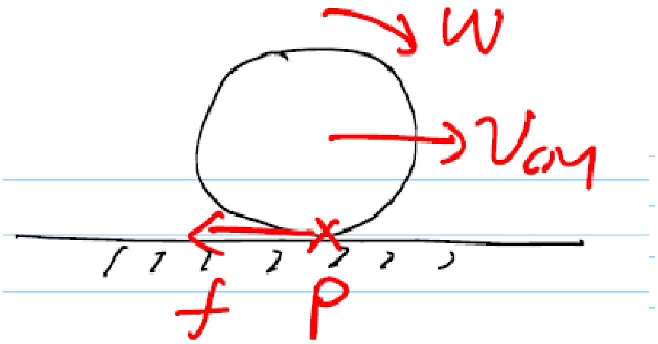
At $t = T$, $v_{CM} = -R\omega$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_{CM}{}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}{}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m R^2 (\frac{v_{CM}}{R})^2$$

$$= \frac{7}{10} m v_{CM}{}^2 = \frac{7}{10} m \left(\frac{5}{7} v\right)^2 = \frac{5}{14} m v^2$$

$$\Rightarrow W_s = -\frac{1}{7} m v^2 (\text{ans}) \quad Note: W_s \neq \vec{f} \cdot \Delta \vec{x}$$

Another way to calculate W_s



$$v_p = v_{CM} + R\omega$$

$$= v - \mu g t - \frac{5}{2} \mu g t = v - \frac{7}{2} \mu g t$$

The power provided by f is

$$P_s = \vec{f} \cdot \vec{v_p} = -\mu m g (v - \frac{7}{2} \mu g t)$$

$$W_s = \int_0^T P_s dt = -\mu m g \int_0^T \left(v - \frac{7}{2} \mu g t\right) dt = -\mu m g \left(vt - \frac{7}{4} \mu g t^2\right) |_0^T$$

$$= -\mu m g \left(vT - \frac{7}{4} \mu g T^2\right) = -\frac{1}{7} m v^2 (ans)$$

(三)12 分

有一輪子，初始速度為零，放在一斜面上時角速度為 ω(如圖 2)。

斜面傾角為 θ，重力加速度為 g，輪子與斜面的摩擦係數為 μ。
假設輪子的質量均勻分布在其邊緣上，可知其轉動慣量為 mr^2，其中 m 為輪子的質量，r 為輪子的半徑。

(1)存在一角度 θ_c，使得輪子剛放上斜面時
當 $\theta < \theta_c$時，輪子開始往上升；
當 $\theta = \theta_c$時，輪子停留不升不降；
當 $\theta > \theta_c$時，輪子開始往下滾落；求 θ_c 的值？
(2)當 $\theta = \theta_c$時，求輪子停留在原地不升不降的時間？
(3)當 $\theta < \theta_c$時，求輪子上升的最大高度？

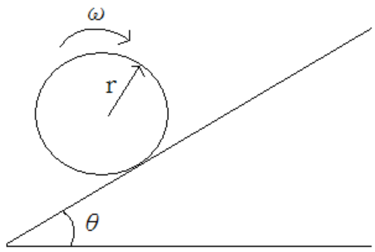


圖 2

[解答]

(1)最大摩擦力等於重力在斜面的分量時，$\theta = \theta_c$，故

$$\mu mg\cos(\theta_c) = mg\sin(\theta_c)$$
$$\theta_c = \tan^{-1}(\mu)$$

(2)角加速度

$$\alpha = -\frac{\mu mg\cos(\theta_c)\cdot r}{mr^2} = -\frac{\mu g\cos(\theta_c)}{r} = -\frac{g}{r}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

故

$$t = -\frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega r}{g}\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}$$

(3)爬升可分為兩階段，

第一階段輪子在斜面打滑，此時摩擦力做功。

摩擦力大小為$\mu mg\cos(\theta)$。

平移加速度 $a = \frac{\mu mg\cos(\theta) - mg\sin(\theta)}{m} = g(\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))$

角加速度 $\alpha = -\frac{\mu mg\cos(\theta)\cdot r}{mr^2} = -\frac{g}{r}\mu\cos(\theta)$

設到輪子不打滑的時間為 t_1，則

$$(\omega + \alpha t_1)\cdot r = at_1$$

$$t_1 = \frac{r\omega}{g(2\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))}$$

此時爬升高度為

$$h_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \cdot \sin(\theta) = \frac{r^2\omega^2}{2g}\frac{(\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))\cdot\sin(\theta)}{(2\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}$$

第二階段輪子不再打滑，摩擦力不作功，機械能守恆。

此時速度為 $at_1 = \frac{r\omega(\mu\cos(\theta)-\sin(\theta))}{2\mu\cos(\theta)-\sin(\theta)}$

角速度為 $\frac{\omega(\mu\cos(\theta)-\sin(\theta))}{2\mu\cos(\theta)-\sin(\theta)}$

動能為 $\frac{mr^2\omega^2(\mu\cos(\theta)-\sin(\theta))^2}{(2\mu\cos(\theta)-\sin(\theta))^2}$

設此時爬升高度為 h_2，則

$$mgh_2 = \frac{mr^2\omega^2(\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}{(2\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}$$

$$h_2 = \frac{r^2\omega^2}{g}\frac{(\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}{(2\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}$$

故總爬升高度 h 為

$$h = h_1+h_2 = \frac{r^2\omega^2}{2g}\frac{(\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))\cdot\sin(\theta)}{(2\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2} + \frac{r^2\omega^2}{g}\frac{(\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}{(2\mu\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}$$
$$= \frac{r^2\omega^2}{2g}\frac{\mu\cos(\theta) - \sin(\theta)}{2\mu\cos(\theta) - \sin(\theta)}$$

(四)12 分

兩個材質相同，半徑分別為 a 及 $2a$ 的均勻實心球，將小球放置在大球上，再使兩球同時間從大球質心與水平面距離 h 處的高度垂直落下。大球在碰撞巨大水平面後反彈，瞬即與小球碰撞。若整個過程中兩球質心始終保持在同一鉛錘線上，而且所有的碰撞均為彈性碰撞。試問

(1)在大球與小球互相碰撞後的瞬間，兩球的速度分別為何？

(2)小球球心能達到的最大高度（與水平面距離）為何？

[解答]

設小球質量為 m_1，大球質量為 m_2， 由題意知 $m_2=8m_1$.

大球落地時兩球的速度： $m_2g(h-2a)=\frac{1}{2}m_2v^2 \Rightarrow v=-\sqrt{2g(h-2a)}$

在大球與水平面碰撞後，與小球彈性碰撞前：

$$v_1=-\sqrt{2g(h-2a)},\ v_2=+\sqrt{2g(h-2a)}$$

設小球、大球碰撞後的速度分別為 v_1' 及 v_2'

$$\begin{cases} m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \Rightarrow m_1v_1+8m_1v_2=m_1v_1'+8m_1v_2' \\ v_1-v_2=-(v_1'-v_2') \end{cases}$$

$$9v_1'=16v_2-7v_1=23\sqrt{2g(h-2a)} \Rightarrow v_1'=\frac{23}{9}\sqrt{2g(h-2a)}$$

$$v_2'=v_1'+v_1-v_2=\frac{5}{9}\sqrt{2g(h-2a)}$$

小球球心能達到的最大高度：

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2=m_1gh' \Rightarrow h'=\frac{v_1'^2}{2g}=\left(\frac{23}{9}\right)^2(h-2a)=\frac{529}{81}(h-2a)$$

$$H=5a+\frac{529}{81}(h-2a)=\frac{1}{81}(529h-653a)$$

(五)12 分

救難人員搭乘直升機到 500 公尺高的荒山野嶺，執行空投物資的救援工作。直升機以水平速度 50 m/sec 往前飛行。試問

(1)要讓救援物資可以準確空投至救援地點，救難人員離救援地點上空多少水平距離時，就得進行空投任務?(如圖 3)

(2)若直升機在距離救援地點水平距離 600 公尺上空，進行空投任務，救難人員不施以任何外力情況下，救援物資是否可以空投至救援地點? 若施以外力，救難人員該如何調整在垂直方向上的拋投動作? 意即救難人員該以何速度往上或往下進行拋擲救援物資?(如圖 4)

(3)承上題，救難物資落到救援地點的速度大小為何?(重力加速度為 10 m/sec^2)

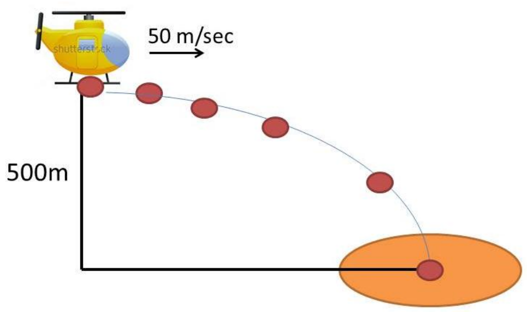


圖 3

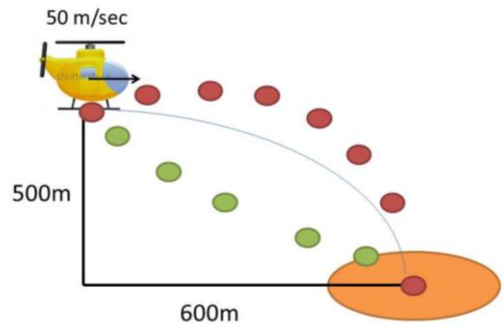
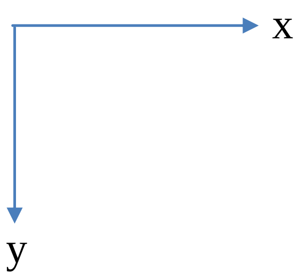


圖 4

[解答]

(1)



空投物為具有 x 方向初始速度的自

由落體:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$500 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

$$t = 10(\text{sec})$$

救難人員需離救援地:

$50 \times 10 = 500(\text{m})$前拋投

(2)

$$600(\mathrm{m}) > 500(\mathrm{m})$$

→需使救難物資往上拋投才能順利投至救援地(或直接計算)

$$600\mathrm{m} = v_x t = 50\mathrm{t}$$

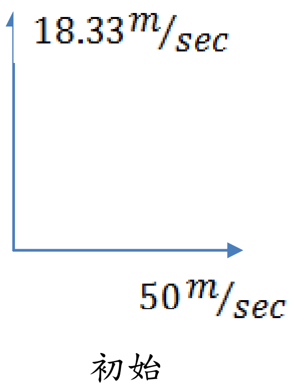
$\mathrm{t} = 12(\mathrm{sec})$到達空投地點

$$\mathrm{y} = v_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

$v_y = -18.33\, {}^{m}/_{sec}$ (往上拋)

垂直速度: $18.33\, {}^{m}/_{sec}$

(3)



$$v_y = -18.33 + gt\ , v_y = 101.67\, {}^{m}/_{sec}$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(50)^2 + (101.67)^2}$$

$$\cong 113.3\, {}^{m}/_{sec}$$

(六)12 分

一理想氣體的定容莫耳比熱 $C_v = \frac{5}{2}R$，進行點 a 到點 b 的熱力學過程，如圖 5 沿著 a-c-b，a-d-b，a-b 三個不同的路徑進行。令 $P_2=2P_1$ 且 $v_2=2v_1$。

(1)計算在上述三個熱力學過程裡，提供給此氣體每莫耳的熱流為何? 請以 R 與 T_1 寫出你的答案。

a-c-b	

a-d-b	
a-b	

(2)就 *a-b* 這個路徑，請以 R 寫出此氣體的定容莫耳比熱。

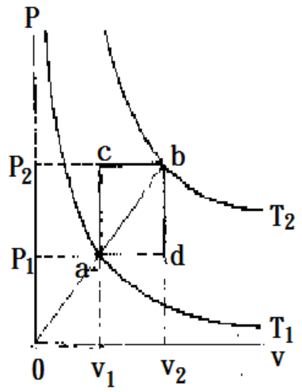


圖 5

[解答]

(1)理想氣體 $U_f\text{-}U_i = C_V(T_f\text{-}T_i) = \frac{5}{2}R(T_f\text{-}T_i)$ 且

(每莫耳的理想氣體) $Pv=RT$

就 *a-c-b* 路徑而言:

a-c $(P_1,v_1, T_1) \rightarrow (2P_1,v_1, 2T_1)$

$\because v_1$ 不變 $\therefore W=0$; $\Delta U = \frac{5}{2}R(2T_1\text{-}T_1) = \frac{5}{2}RT_1$; $Q_{a\text{-}c} = \frac{5}{2}RT_1$

c-b $(2P_1, V_1, 2T_1) \rightarrow (2P_1, 2V_1, 4T_1)$

$\because P_1v_1 = RT_1$

$2P_1v_1 = R(2T_1)$ $T_3 = 2T_1$

$(2P_1)(2v_1) = R(4T_1)$ $T_4 = 4T_1$

$\therefore \Delta U = \frac{5}{2}R(4T_1\text{-}2T_1) = 5RT_1$; $W = 2P_1 (2v_1\text{-} v_1) = 2P_1v_1= 2RT_1$; $Q_{c\text{-}b} = 7RT_1$

$\therefore$ $Qa\text{-}c\text{-}b = Q_{a\text{-}c} + Q_{c\text{-}b} = \frac{19}{2}RT_1$

就 *a-d-b* 路徑而言:

a-d $(P_1,v_1, T_1) \rightarrow (P_1, 2v_1, 2T_1)$

$\Delta U = \frac{5}{2}RT_1$; $W = P_1 (2v_1\text{-} v_1) = P_1v_1= RT_1$; $Q_{a\text{-}d} = \frac{7}{2}RT_1$

d-b $(P_1, 2v_1, 2T_1) \rightarrow (2P_1, 2v_1, 4T_1)$ $T_2 = 4T_1$

$\Delta U = 5RT_1$; $W = 0$; $Q_{d\text{-}b} = 5RT_1$

$\therefore Q_{a\text{-}d\text{-}b} = Q_{a\text{-}d} + Q_{d\text{-}b} = \frac{17}{2}RT_1$

a-b $(P_1, v_1, T_1) \rightarrow (2P_1, 2v_1, 4T_1)$

$$\Delta U = \frac{5}{2}R(4T_1 - T_1) = \frac{15}{2}RT_1 \;;\; W = \int \int_{v_1}^{2v_1} P\,dv = \int [P_1 + A(v - v_1)]dv =$$

$$= P_1 v|_{v_1}^{2v_1} + \frac{1}{2}Av^2|_{v_1}^{2v_1} + Av_1 v|_{v_1}^{2v_1} \quad 且\ A = \frac{P_1}{v_1}$$

$$\therefore W = \frac{3}{2}P_1 v_1 = \frac{3}{2}RT_1; \quad Q_{a\text{-}b} = 9RT_1$$

a-c-b	$\frac{19}{2}RT_1$
a-d-b	$\frac{17}{2}RT_1$
a-b	$9RT_1$

(2) $C_{ab} = \frac{Q_{ab}}{T_{ab}} = \frac{9RT_1}{3T_1} = 3R$ #

(七)12 分

取兩片玻璃相互貼近，請回答下列問題並需畫出光線干涉圖：

(1) 如果一束波長為 600 nm 的光線穿透後，產生建設性干涉，則最小可能的兩玻璃間距為多少?

(2) 如果兩片玻璃間夾入兩條相同且直徑在微米等級的細金屬線，當以波長為 600 nm 的光線照射時，由上方無法看到光；但以波長為 480 nm 的光線照射時，由上方觀察到亮光；則最可能的細金屬線直徑為多少?

(3) 如果在兩片玻璃間放入折射率為 1.3 的液體，此時需以波長為多少奈米的光線照射才能觀察到亮光?

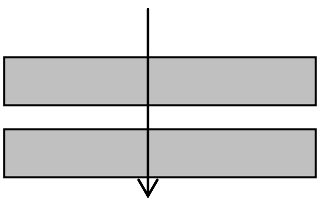


圖 6

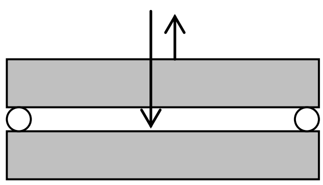
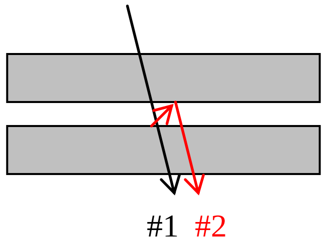
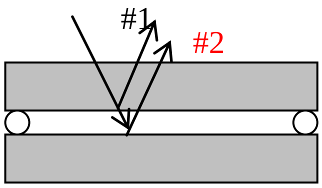


圖 7

[解答]



圖一(應為垂直線)



圖二(應為垂直線)

(1) 如圖一，光線#2 在玻璃片間來回反射後，經過兩次π相位變化後與光線#1 相位差為零，因此光線垂直穿透後產生建設性干涉的條件為光程差(2d；d 為兩玻璃間距)等於波長整數倍，即 $2d = m\lambda$。因此最小的間距 $2d\,(\min.) = \lambda$，因此 $d = \lambda/2 = 600/2 = 300$ (nm)。

(2) 如圖二，光線#1 被上方玻璃片的下方界面反射後沒有相位變化(因為由光密介質到光疏介質)，但光線#2 經下方玻璃片的上方界面反射後產生π相位變化(因為由光疏介質到光密介質)，因此光線垂直反射後產生建設性干涉的條件為光程差加上半波長等於波長整數倍，即 $2d + \lambda/2 = m\lambda$。而反射後產生破壞性干涉的條件為 $2d + \lambda/2 = (m - 1/2)\lambda$。

$\therefore$ (亮區) $2d = (m - 1/2) \times 0.48$

(暗區) $2d = (m - 1) \times 0.6$　且　m 相同

$\rightarrow (m - 1/2) \times 0.48 = (m - 1) \times 0.6$

$\therefore m = 3$　代回上任一式，解得　$d = 0.6$ (μm)。

(3) 依題意，光在折射率(n)為 1.3 的液體中波長變成 λ/n，光線垂直反射後產生建設性干涉的條件為 $2d = (m + 1/2)(\lambda/n)$

$\therefore 2d = (m + 1/2) \times (\lambda/1.3) \rightarrow (m + 1/2) \times \lambda = 1.56 \rightarrow \lambda = 1.56/(m + 1/2)$

$\rightarrow$ if $m = 1$, then $\lambda = 1.04$ (μm)　不是可見光

$\rightarrow$ if $m = 2$, then $\lambda = 0.624$ (μm) = 624 nm 是可見光

$\rightarrow$ if $m = 3$, then $\lambda = 0.4457$ (μm) = 445.7 nm　是可見光

$\rightarrow$ if $m = 4$, then $\lambda = 0.3467$ (μm)　不是可見光

因此以 624 nm 或 445.7 nm 才能由上方觀察到亮光。

(八)12 分

如下圖 8 所示，以變折射率材料所製成的微透鏡聚焦平行光束，其折射率分布 $n(r)$具 z 軸對稱關係，微透鏡的焦距為 f，且 f 值遠大於微透鏡的孔徑 a，而 a 又遠大於微透鏡之厚度 d。

(1) 請定性分析 $n(r)$，說明其變化趨勢是隨 r 增加而增加，還是隨 r 增加而降

低?

(2) 請定量分析 $n(r)$，導出折射率變化函數 $n(r)$，假設軸上折射率為 n_o。[運算提示: 因 $y \ll x$，$\sqrt{x^2+y^2} \approx x+\dfrac{y^2}{2x}$]

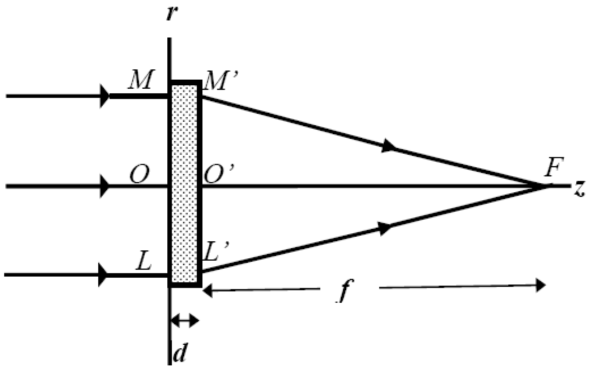


圖 8

[解答]

(1)以等光程特性求解:

$\overline{MM'F}$ 光程路徑 = $\overline{OO'F}$ 光程路徑，所以 $n(r)\,d + \overline{M'F} = n_o d + f$

從幾何圖中可發現之 $\overline{M'F} > f$，所以 $n(r) < n_o$，於是 $n(r)$隨 r 增加而降低。

(2)因 $a \ll f$ 滿足近軸條件，於是 $\overline{M'F} = \sqrt{f^2+r^2} \approx f + \dfrac{r^2}{2f}$

$\overline{M'F} - f = \dfrac{r^2}{2f}$ 代入上式 $n(r)\,d + \overline{M'F} = n_o d + f$ ，可求得 $n(r) = n_o - \dfrac{r^2}{2fd}$