104學年度臺灣省高級中等學校數理及資訊學科能力競賽第6區複賽
物理科筆試試題參考解

【第一題】

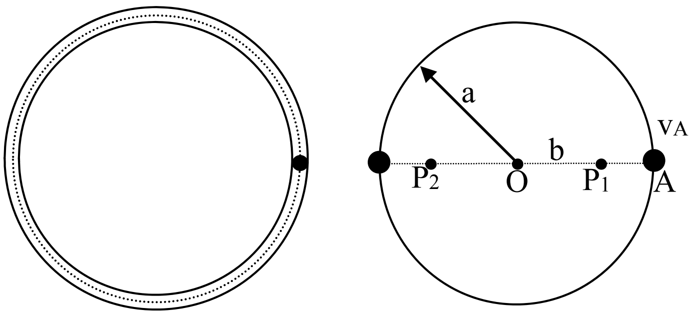
如圖所示，一質點可在一半徑為 a 的水平光滑圓形凹槽上運動。此質點受兩吸引力場的作用，其中一個大小為 $\frac{k_1}{r_1^2}$ ，方向皆指向 P_1 點，另一個大小為 $\frac{k_2}{r_2^2}$ ，方向皆指向 P_2 點，式中 k_1, k_2 為常數，r_1, r_2 為該質點到 P_1 點或 P_2 點的距離。P_1 點或 P_2 點為圓面某直徑上的一個定點，其各自距圓心 O 的距離皆為 b ($b < a$)。此質點從圓上最靠近 P_1 點處（即 A 點）被以切線速度 v_A 射出，當該質點到達圓上最靠近 P_2 點處（即 B 點）時的速度為 v_B，

若 $v_A= \sqrt{\frac{4bk_2}{a^2-b^2}}$，

則當 (a) $k_1= k_2$ 時，v_B 大小為何?（以 k_2，a，b 表示之）。(4 分)

(b) $k_1=2k_2$ 時，v_B 大小為何?（以 k_2，a，b 表示之）。(4 分)

(c) $2k_1= k_2$ 時，v_B 大小為何?（以 k_2，a，b 表示之）。(4 分)



【第一題解答】

一、圓形凹槽水平光滑且向心力不做功。

本題可利用能量守恆求解，因引力位能為 $-\frac{km}{r}$ ，式中 m 為質點質量，

所以

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{k_1m}{(a+b)}-\frac{k_2m}{(a-b)}=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{k_1m}{(a-b)}-\frac{k_2m}{(a+b)} \qquad (1)$$

$v_A= \sqrt{\frac{4bk_2}{a^2-b^2}}$

(a) $k_1= k_2$ 時，(1)式變為

$$\frac{1}{2}v_B^2-\frac{k_2}{(a+b)}-\frac{k_2}{(a-b)}=\frac{1}{2}v_A^2-\frac{k_2}{(a-b)}-\frac{k_2}{(a+b)}$$

$$v_B=v_A=\sqrt{\frac{4bk_2}{a^2-b^2}}$$

(b) $k_1=2k_2$ 時，(1)式變為

$$\frac{1}{2}v_B^2-\frac{2k_2}{(a+b)}-\frac{k_2}{(a-b)}=\frac{1}{2}v_A^2-\frac{2k_2}{(a-b)}-\frac{k_2}{(a+b)}$$

$$\frac{1}{2}v_B^2=\frac{1}{2}v_A^2-\frac{k_2}{(a-b)}+\frac{k_2}{(a+b)}$$

$\frac{1}{2}\mathrm{v}_{\mathrm{B}}^{2}=\frac{1}{2}\mathrm{v}_{\mathrm{A}}^{2}-\frac{2b\mathrm{k}_{2}}{\mathrm{a}^{2}-\mathrm{b}^{2}}$

$\mathrm{v}_{\mathrm{B}}^{2}=\mathrm{v}_{\mathrm{A}}^{2}-\frac{4b\mathrm{k}_{2}}{\mathrm{a}^{2}-\mathrm{b}^{2}}$

$v_B=0$

(c) $2k_1= k_2$ 時，(1)式變為

$\frac{1}{2}\mathrm{v}_{\mathrm{B}}^{2}-\frac{\mathrm{k}_{1}}{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}-\frac{2\mathrm{k}_{1}}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})}=\frac{1}{2}\mathrm{v}_{\mathrm{A}}^{2}-\frac{\mathrm{k}_{1}}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})}-\frac{2\mathrm{k}_{1}}{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$

$\frac{1}{2}\mathrm{v}_{\mathrm{B}}^{2}=\frac{1}{2}\mathrm{v}_{\mathrm{A}}^{2}+\frac{\mathrm{k}_{1}}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})}-\frac{\mathrm{k}_{1}}{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$

$\mathrm{v}_{\mathrm{B}}^{2}=\mathrm{v}_{\mathrm{A}}^{2}+\frac{\mathrm{k}_{2}}{(\mathrm{a}-\mathrm{b})}-\frac{\mathrm{k}_{2}}{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$

$\mathrm{v}_{\mathrm{B}}^{2}=\mathrm{v}_{\mathrm{A}}^{2}+\frac{2b\mathrm{k}_{2}}{\mathrm{a}^{2}-\mathrm{b}^{2}} \quad \mathrm{v}_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{6\mathrm{b}\mathrm{k}_{2}}{\mathrm{a}^{2}-\mathrm{b}^{2}}}$

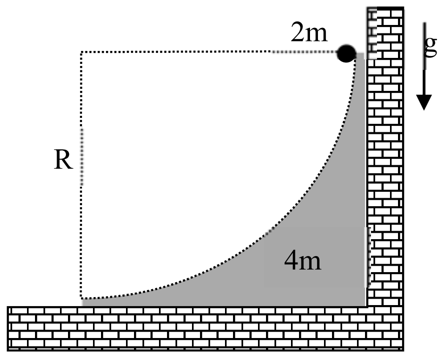
【第二題】

半徑為 R，質量為 4m 的四分之一圓弧狀光滑木塊(如灰色區域所示)，緊靠在光滑的地面與牆上，將一質量為 2m 的小球從木塊頂端靜止釋放，

求　(a)小球受木塊之最大正向力為何? (3 分)

(b)木塊受地面之最大正向力為何? (3 分)

(c)當木塊受牆面之最大正向力時，
小球與圓心之連線與鉛直線的夾角為何? (4 分)

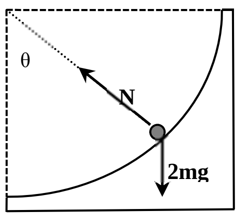


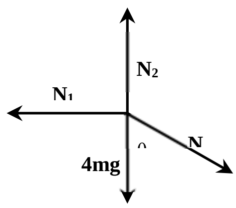
【第二題解答】

設 N 為圓弧狀光滑木塊對小球的正向力，

N_1 為牆面對木塊的正向力，N_2 為地面對木塊的正向力，θ 為 N 與鉛直線夾角

則小球與木塊之力圖如下：





(a)

向心力: $N - 2mg\cos\theta = \dfrac{2mv^2}{R}$

位能轉動能: $\dfrac{1}{2}2mv^2 = 2mgR\cos\theta$

由上兩式可得 $N = 6mg\cos\theta$，小球受木塊之最大正向力為 6mg

(b)

$N_2 = 4mg + N\cos\theta = 4mg + 6mg\cos^2\theta$

木塊受地面之最大正向力為 10mg

(c)

$N_1 = N\sin\theta = 6mg\cos\theta\sin\theta = 3mg\sin2\theta$

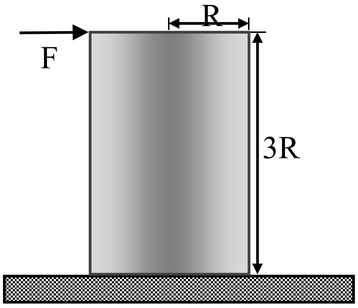
其最大值發生在 θ 為 45^o 時。

【第三題】

如圖所示，有一靜置於水平桌面之均質圓柱體，重量為 W、半徑為 R、高為 3R。桌面與圓柱底部之間的動摩擦係數與靜摩擦係數皆為 0.25。現於圓柱上緣施一水平力 F，且此力之延長線通過圓柱上端面的圓心。

(a)若該圓柱體沿水平方向作直線等速度運動，則桌面對圓柱體所施正向力之合力的施力點，與圓柱下端面的圓心之間的距離為何? (3 分)

(b)若欲使該圓柱只滑動而不會傾倒，則水平施力 F 大小的範圍(□<F<□)為何? (5 分)



【第三題解答】

(a)如圖所示，N 為桌面對圓柱體所施正向力之合力，其施力點至圓柱下端面圓心的距離為 x，f_k 為動摩擦力。因圓柱體作直線等速度運動，故其所受合力為零。即

鉛直　N=W

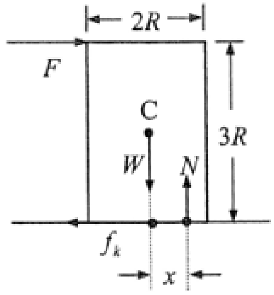
水平　$F=f_k=\mu_k N=\mu_k W=0.25W$

將力矩參考點取在重心 C，合力矩為零，即

$F\times1.5R+ f_k\times1.5R-N\times x=0$

$\Rightarrow 0.25W\times1.5R+0.25W\times1.5R-W\times x=0$

$\Rightarrow x=0.75R$ 或 $\frac{3}{4}R$



(b)如圖所示，當圓柱體要傾倒的瞬間，正向力 N 的施力點移至底面邊緣 B 點。若欲使圓柱體不傾倒，則對 B 點的合力矩需小於等於零，即

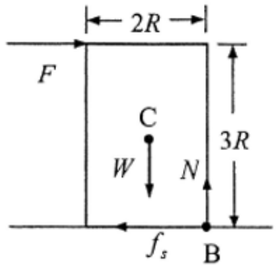
$\mathrm{F}\times 3\mathrm{R}-\mathrm{WR}\leq 0\Rightarrow \mathrm{F}\leq\frac{W}{3}$

圓柱滑動的條件為水平施力 F 大於等於動摩擦力，即

$\mathrm{F}\geq f_k=\mu_k N=\mu_k W=\frac{W}{4}$

故所求為

$\frac{W}{4}\leq F\leq\frac{W}{3}$



【第四題】

下圖左端為重繩右端為輕繩，質量比為 9：4，長度均為 1.2 公尺，兩繩一端相接另一端分別繫於牆上。在相接處製造一脈衝，產生兩脈衝反向在兩繩行進，分別經兩側之牆反射後相向行進。兩脈衝第一次交會位於何處？（表示出在兩繩相接處左側或右側幾公尺？）(10 分)

【第四題解答】

1. 繩的傳播速率 $v=\sqrt{\frac{\text{繩張力}}{\text{繩質量}/\text{繩長}}}\Rightarrow\frac{v_L}{v_R}=\frac{\sqrt{\frac{T}{m_L/l}}}{\sqrt{\frac{T}{m_R/l}}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

   重繩速度慢，可判斷第一次交會於相接處左側。

   假設交會於相接處左側 x 處。出發至交會，向左與向右兩波歷時相同。

$$t_L=t_R\Rightarrow\frac{2l-x}{v_L}=\frac{2l}{v_R}+\frac{x}{v_L}\Rightarrow\frac{2.4-2x}{2}=\frac{2.4}{3}\Rightarrow x=0.4\text{ 公尺}$$

Ans：第一次交會於相接處左側 0.4 公尺處。

【第五題】

如圖一閉口空氣管與聲源相向而行。空氣管接收到的聲音頻率為 f=430 赫，當聲波之疏部中點抵達管底時，距此疏部最鄰近之密部中點亦抵達管口。已知管長 L=0.4 公尺、聲速 v=340 公尺/秒、聲源頻率 f_0=400 赫。(a) 空氣管之速度量質為何？(10 分) (b) 聲源之速度量質為何(10 分)？

【第五題解答】

(a) 依題意空氣管長為聲波疏部中點至最鄰近之密部中點。

$$L=\frac{\lambda}{2}=0.4\Rightarrow\lambda=0.8\text{ 公尺}$$

聲波相對空氣管之速度為$v_{聲管}=v_{聲}-v_{管}$

$$f=\frac{v_{聲管}}{\lambda}\Rightarrow 430=\frac{340-v_{管}}{0.8}\Rightarrow v_{管}=-4\text{ 公尺/秒}$$

(b) 依都普勒效應，聲源以速度$v_{源}$靠近空氣管，縮短空氣管接收聲波之波長$\lambda_{管}$。

$$\lambda_{管}=\lambda_{聲}-\Delta\lambda\Rightarrow 0.8=\frac{v_{聲}}{f_0}-\frac{v_{源}}{f_0}=\frac{340}{400}-\frac{v_{源}}{400}\Rightarrow v_{源}=20\text{ 公尺/秒}$$

Ans：(a) 空氣管之速度量質為 4 公尺/秒，(b) 聲源之速度量質為 20 公尺/秒。