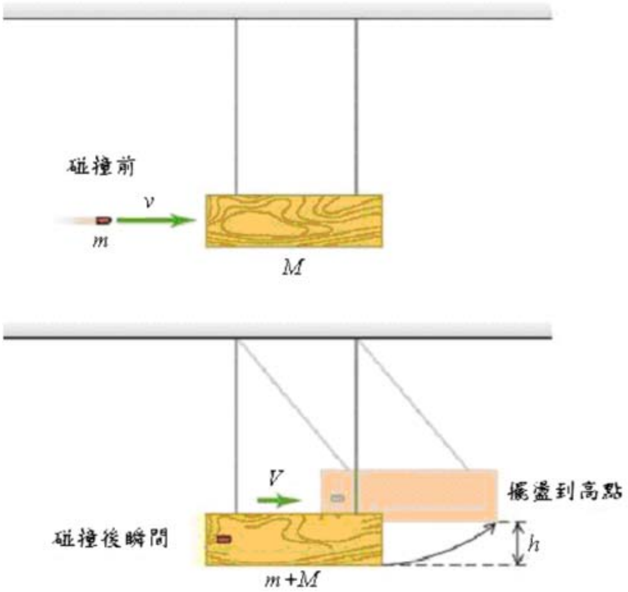
104 學年度高級中等學校數理與資訊學科能力競賽臺灣省第 9 區複賽
物理科筆試試題參考解

《第一題》

方法一：「利用衝擊擺求子彈的速度」



以兩個階段來分析這個事件：

(一) 子彈嵌入木塊。

(二) 木塊在線上的擺盪至最大高度 h 後靜止，然後往下擺。

在第一個階段，子彈迅速地把自己嵌入木塊，使得木塊沒有時間明顯地移動顯著的位移。吊線保持近乎垂直，撞及前後動量的水平分量守恆。機械能在這個階段不守恆，因為有一個非保守力作功(子彈和木塊之間的摩擦力)。

先計算前段完全非彈性碰撞下，木塊與子彈合體碰撞後的速度。

利用碰撞前後動量守恆 $mv = (m+M)V$，可得碰撞前子彈速度 v 和碰撞後合體速度 V 的關係：

$$v = \frac{(m+M)V}{m}$$

在第二個階段，木塊和子彈如同一個物體般運動。作用在這一個物體的力是重力(保守力)以及線張力(沒有作功)。因此，當木塊向右上方擺盪時，機械能守恆。動量在這個階段不守恆，因為有一個淨外力(當線傾斜時，重力和線張力不能抵消)。

此段除重力外無任何外力，滿足機械能守恆。

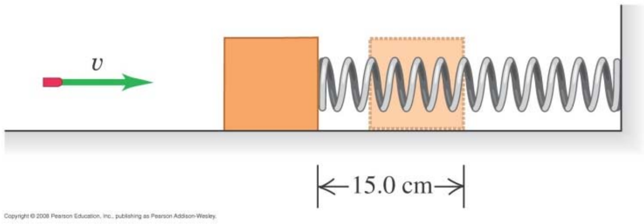
最低點位能為 0，動能為$\frac{1}{2}(m+M)V^2$

最高點位能為$(m+M)gh$，動能為 0。

所以$0+\frac{1}{2}(m+M)V^2=(m+M)gh+0$，求出 V 代回前式，即得子彈的速度為

$$v = \frac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m}$$

方法二：「利用彈簧壓縮求子彈的速度」



以兩個階段來分析這個事件：（儘量做到符合地面摩擦力可忽略）

(一) 子彈嵌入木塊

(二) 木塊在壓縮彈力常數為 k 的彈簧至最大形變 d 後靜止，然後回彈。

在第一個階段，分析同方法一，動量守恆 $mv=(m+M)V$，子彈速度 $v=\dfrac{(m+M)V}{m}$

在第二個階段，除彈力外無任何外力，滿足機械能守恆。

開始，位能為 0，動能為 $\dfrac{1}{2}(m+M)V^2$

最大形變 d，位能為 $\dfrac{1}{2}kd^2$，動能為 0

根據機械能守恆 $\dfrac{1}{2}(m+M)V^2=\dfrac{1}{2}kd^2$， 得 $V=\sqrt{\dfrac{kd^2}{(m+M)}}$

則子彈的速度為， $v=\dfrac{(m+M)V}{m}=\dfrac{(m+M)}{m}\sqrt{\dfrac{kd^2}{(m+M)}}=\dfrac{d}{m}\sqrt{(m+M)k}$

方法三：「利用平拋運動求子彈的速度」

以兩個階段來分析這個事件：（儘量做到符合地面摩擦力可忽略）

(一) 木塊放在高 h 的桌面，而且靠近桌邊，子彈嵌入木塊。

(二) 木塊水平飛出，在離桌子水平距離 R 處落地。

在第一個階段，動量守恆 $mv=(m+M)V$，子彈速度 $v=\dfrac{(m+M)V}{m}$

在第二個階段，設落下時間為 t，則平拋飛出的水平速度為 $V=R/t$。而在垂直分量上屬靜止落下的自由落體，落下時間與高度關係為 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$，g 為重力加速度。所以 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，

$V=R/\sqrt{\dfrac{2h}{g}}=R\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$。則有子彈速度 $v==\dfrac{(m+M)R}{m}\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$

方法四：「利用固定不動的光滑半圓軌道求子彈的速度」，因為摩擦不計下軌道對木塊不做功，滿足滿足機械能守恆，分析與方法一類似。

方法五：「利用固定不動的光滑斜面求子彈的速度」，分析與上面方法類似

《第二題》

(a)

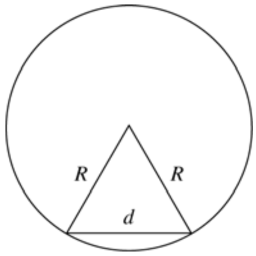
設Δt 的時間鋼球純滾動了Δθ 角度，由角速度定義可知ω=Δθ / Δt，此時質心相對地面平行移動弧長Δs，由圓的幾何性質可知ΔS =R Δθ，則有

$$v_{cm}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=R\omega$$

(b)

鋼球在兩根距離 d 的橫木軌道純滾動的正視圖如右圖所示，質心相對地面平行移動弧長Δs 的半徑不是 R，而是由半徑 $\sqrt{R^2-(d/2)^2}$ 取代，所以

$$v_{cm}=\omega\sqrt{R^2-d^2/4}$$



當 d=0，相當於橫木軌道時，答案變成 $v_{cm}=R\omega$，與在平面上做純滾動相同。當 d=2R，答案變成 $v_{cm}=0$，代表球就沒有靠柱軌道兩側橫木各一點，題目原本的假設情況不成立。

(c)

根據機械能守恆，滾至地面位能減少 mgh，轉變成質心動能 $K_{cm}=\frac{1}{2}mv_{cm}^2$，加上相對於質心轉動的動能 $K_\theta=\frac{1}{2}I\omega^2$，則

$$U=K_{cm}+K_\theta;\quad mgh=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$v_{cm}=\sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

(d)、承上題，而質心速度由 $v_{cm}=\omega\sqrt{R^2-d^2/4}$ 取代，則有

$$K=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left[mv_{\mathrm{cm}}^2+(2/5)mR^2\left(\frac{v_{\mathrm{cm}}}{\sqrt{R^2-(d^2/4)}}\right)^2\right]=\frac{mv_{\mathrm{cm}}^2}{10}\left[5+\frac{2}{(1-d^2/4R^2)}\right]$$

$$v_{cm}=\sqrt{\frac{10gh}{5+2/(1-d^2/4R^2)}}$$

當 d=0，相當於橫木軌道時，答案變成 $v_{cm}=\sqrt{\frac{10gh}{7}}$，與在斜面上做純滾動相同。當 d=2R，答案變成 $v_{cm}=0$，代表球就沒有靠柱軌道兩側橫木各一點，題目原本的假設情況不成立。.

《第三題》

(a)

設三支桌腳各自施加於圓桌之力分別為 N_A, N_B,N_C，正三角形中線長為 l

以 $\overline{BC}$ 當轉軸：

$$N_A \cdot l = mg \cdot \frac{l}{3} \Rightarrow N_A = \frac{1}{3}mg$$

以 $\overline{AB}$ 當轉軸：

$$N_C \cdot l = 2mg \cdot \frac{l}{2} + mg \cdot \frac{l}{3} \Rightarrow N_C = \frac{4}{3}mg \text{ 同理 } N_B = N_C = \frac{4}{3}mg$$

所以，最大的是最小的 4 倍

(b)

以某兩支撐點連線為轉軸，設物體與轉軸之垂直距離為 x：

$$mg \cdot \frac{l}{3} = 2mg \cdot x \Rightarrow x = \frac{l}{6}$$

以某支撐點為支點，設物體與該支撐點之距離為 y：

$$mg \cdot \frac{2l}{3} = 2mg \cdot y \Rightarrow y = \frac{l}{3}$$

分別畫出與三轉軸垂直距離為 $\frac{l}{6}$ 的平行線，三線交會，形成中線長為 $\frac{3}{2}l$ 、邊長為 $\frac{3}{2}L$ 的三角形，其各個頂點與最近支撐點的距離為 $\frac{l}{3}$ 。

將該物體放置在此三角形範圍內，可使圓桌維持水平不傾斜。

該三角形面積大小為 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3L}{2} \cdot \frac{3l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3L}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}L}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{16}L^2$

所求面積大小為 $\pi R^2 - \frac{9\sqrt{3}}{16}L^2$

《第四題》

(a)

設 B 圓柱的質量為 m，速度為 v，所受之正向力為 N，令 $R=R_A+R_B$

其向心力$\frac{mv^2}{R} = mgcos\theta - N$，在脫離瞬間，N=0，此時，$mv^2 = mgRcos\theta_1$

由於一開始靜止時的動能為零，所以脫離瞬間的動能等於此段期間的位能減少量，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR - mgRcos\theta_1 = mgR(1 - cos\theta_1)$$

所以，$mgRcos\theta_1 = 2mgR(1 - cos\theta_1) \ \Rightarrow \ cos\theta_1 = \frac{2}{3}$

(b)

B 圓柱體從靜止開始，沿 A 圓柱體的表面以純滾動($v = R_B\omega$)的方式滾下，總動能包含有移動動能及轉動動能，即

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR_B^2\right)\left(\frac{v}{R_B}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

其向心力$\frac{mv^2}{R} = mgcos\theta - N$，在脫離瞬間，N=0，此時，$mv^2 = mgRcos\theta_2$

由於一開始靜止時的動能為零，所以脫離瞬間的動能等於此段期間的位能減少量，即

$$\frac{3}{4}mv^2 = mgR(1 - cos\theta_2)$$

所以， $mgRcos\theta_2 = \frac{4}{3}mgR(1 - cos\theta_2) \Rightarrow cos\theta_2 = \frac{4}{7}$

《第五題》

(a)

在 A 與 B 極短的完全非彈性碰撞期間，C 保持靜止不動，僅需考量 A、B 的動量守恆，設完全非彈性碰撞完成瞬間，A、B 的共同速度為 u，則

$$u = \frac{m_A v}{m_A + m_B}$$

因為三質點系統在 A、B 完全非彈性碰撞期間外並無其他非保守力作用，所以力學能的損失僅發生在完全非彈性碰撞期間，加上題目說在碰撞期間，C 保持靜止不動，且彈簧長度保持不變，意即，碰撞期間 A、B 動能和的損失量就是該三質點系統在碰撞後的力學能損失量。

A、B 動能和的損失量為

$$\frac{1}{2}m_A v^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)u^2 = \frac{1}{2}m_A v^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)(\frac{m_A v}{m_A + m_B})^2 = \frac{1}{2}m_A v^2(1 - \frac{m_A}{m_A + m_B})$$

甲組合(A: 1m、B: 1m、C:1m)、乙組合(A: 1m、B: 2m、C:3m)

關於三質點系統的力學能損失，乙組合是甲組合的$\frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$ 倍

(b)

在 A、B 完成碰撞後，A、B、C 總動能的最小值為三質點系統的質心動能，意即，此時彈簧有最大壓縮量。

由動量守恆可得此系統的質心速度 v_c，$v_c = \frac{m_A v}{m_A + m_B + m_c}$

設彈簧之最大壓縮量為ΔL，則

$$\frac{1}{2}k\Delta L^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)u^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C)v_c^2$$

代入後得 ΔL^2 與 $(\frac{1}{m_A + m_B} - \frac{1}{m_A + m_B + m_C})$ 成正比

關於彈簧長度的最大壓縮量，乙組合是甲組合的 $(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 1$ 倍

(c)

碰撞後三質點系統的質心動能為

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C)v_c^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C)\left(\frac{m_A v}{m_A + m_B + m_c}\right)^2 = \frac{1}{2}(\frac{{m_A}^2 v^2}{m_A + m_B + m_c})$$

關於三質點系統的質心動能，乙組合是甲組合的$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ 倍