

104學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第一題】一個質量 $2m$ 的衛星以圓軌道的方式繞著一半徑為 R 的行星轉動，一個質量為 m 的隕石以初速零的狀態，從遙遠的地方被行星中心點吸引過來。當隕石接近行星時，剛好擊中衛星並黏在一起，而這個新衛星的新軌道正好可以切過行星表面。請問當初衛星的圓軌道半徑為多少？

<參考解>

隕石擊中衛星前的速度 v_1 (垂直方向)，圓軌道半徑 r ，行星質量 M ：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

衛星被擊中前的速度 v_2 (水平方向)

$$2m\frac{v_2^2}{r} = \frac{GM2m}{r^2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

撞擊後新衛星垂直方向速度 v_1' 因為動量守恆，

$$mv_1 = 3mv_1' \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{2GM}{9r}}$$

水平方向速度 v_2'

$$2mv_2 = 3mv_2' \Rightarrow v_2' = \sqrt{\frac{4GM}{9r}}$$

新衛星切過行星表面時速度 v_2'' 根據角動量守恆

$$3mv_2'r = 3mv_2''R \Rightarrow v_2'' = \frac{r}{R} \sqrt{\frac{4GM}{9r}}$$

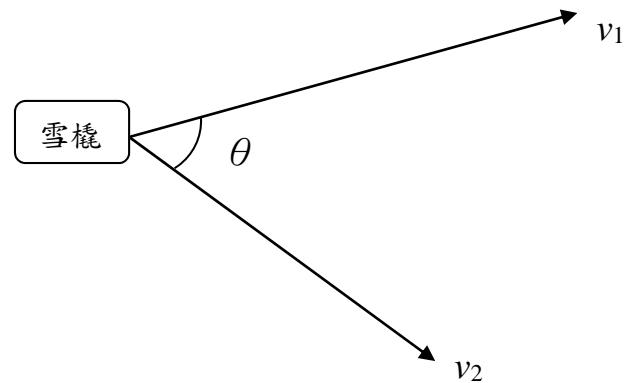
新衛星在撞擊後與切過行星表面時(只有切線速度)能量守恆

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}3m(v_1'^2 + v_2'^2) - \frac{GM3m}{r} &= \frac{1}{2}3mv_2''^2 - \frac{GM3m}{R} \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\left(\frac{r}{R}\right) + 2 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{9}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4} \end{aligned}$$

負不合因為 $r > R$ 所以

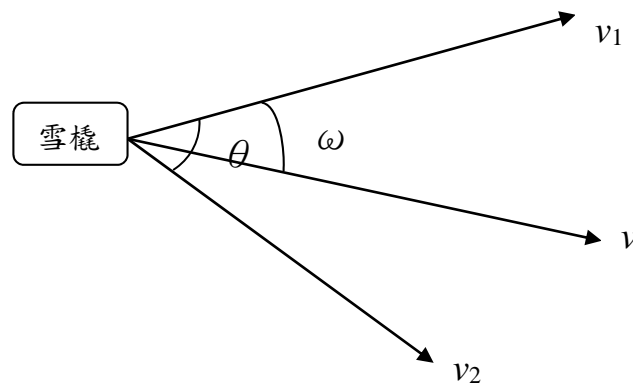
$$r = \left(\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}\right)R$$

【第二題】兩隻狗拉著雪橇，在某一時刻這兩隻狗的速度大小分別是 v_1 與 v_2 ，方向是沿著繩子的方向，假設兩條繩子緊繃無法伸展且夾角為 θ (如圖， θ 不為 0° 及 180°)，則此時雪橇的速度為多少？



<參考解>

假設雪橇速度 v ，方向與 v_1 的夾角為 ω (如圖)。一條連接兩物體的繩子如果緊繃無法伸展，則兩物體沿著繩子方向的速度分量必須相等。因此雪橇沿著 $v_1(v_2)$ 方向的分量會等於 $v_1(v_2)$



$$v_1 = v \cos \omega \quad \Rightarrow \quad v \sin \omega = \sqrt{v^2 - v^2 \cos^2 \omega} = \sqrt{v^2 - v_1^2}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= v \cos(\theta - \omega) = v \cos \theta \cos \omega + v \sin \theta \sin \omega \\ &= v_1 \cos \theta + \sqrt{v^2 - v_1^2} \sin \theta \end{aligned}$$

因此

$$v = \frac{\sqrt{v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta + v_2^2}}{\sin \theta}$$

【第三題】月球繞行地球之軌道半徑為 r 、週期為 t 。地球繞行太陽之週期為 T ，太陽質量為地球質量的 m 倍、為月球質量的 n 倍。地球繞行太陽之軌道半徑為何？（軌道均為圓形）

<參考解>

$$\text{萬有引力為向心力} \Rightarrow F_g = F_c \Rightarrow \frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$\text{依題意} \Rightarrow \frac{r^3}{t^2} = \frac{GM_{\text{地}}}{4\pi^2}, \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_{\text{日}}}{4\pi^2} = \frac{GmM_{\text{地}}}{4\pi^2} = m \frac{r^3}{t^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{m \frac{T^2}{t^2} r}$$

$$\text{Ans : } R = \sqrt[3]{m \frac{T^2}{t^2} r}$$

【第四題】一質點在無摩擦力之軌道做鉛直面圓周運動。過程中最小速率為 v_1 、最大速率為 v_2 ，質點對軌道之最小作用力為 f_1 、最大作用力為 f_2 。若 $v_1 : v_2 = 2 : 3$ ，求 $f_1 : f_2$ 。

<參考解>

v_1, f_1 發生於頂點， v_2, f_2 發生於底點。

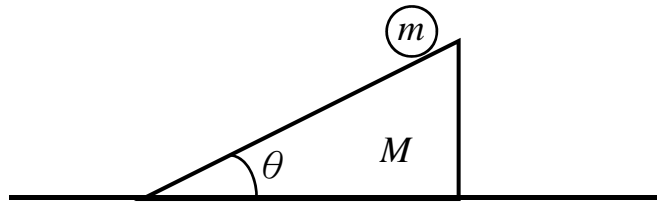
$$\text{力學能守恆} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 4gR \xrightarrow{v_2 = \frac{3}{2}v_1} v_1 = \sqrt{\frac{16}{5}gR} \ \& \ v_2 = \sqrt{\frac{36}{5}gR}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_c \Rightarrow \begin{cases} mg + f_1 = m \frac{v_1^2}{R} = \frac{16}{5}mg \\ f_2 - mg = m \frac{v_2^2}{R} = \frac{36}{5}mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{11}{5}mg \\ f_2 = \frac{41}{5}mg \end{cases}$$

$$\text{Ans : } f_1 : f_2 = 11 : 41$$

【第五題】質量 m 之物體在質量 M 仰角 θ 之楔形斜面上自由下滑。求 M 之加
速度量值。(各接觸面均光滑，重力加速度為 g)



<參考解>

M 受 m 之作用力 N 的水平分量而產生加速度 a 。

m 在斜面之加速座標中，受假想力 ma ，其垂直斜面之分量合力為零。

$$\Rightarrow \begin{cases} N \sin \theta = Ma \\ N + ma \sin \theta = mg \cos \theta \end{cases} \Rightarrow a = \frac{mg \cos \theta}{\frac{M}{\sin \theta} + m \sin \theta}$$

$$\text{Ans : } a = \frac{mg \cos \theta}{\frac{M}{\sin \theta} + m \sin \theta} \text{ or } \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$