105 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（一）參考解

【第一題參考解】

(a)

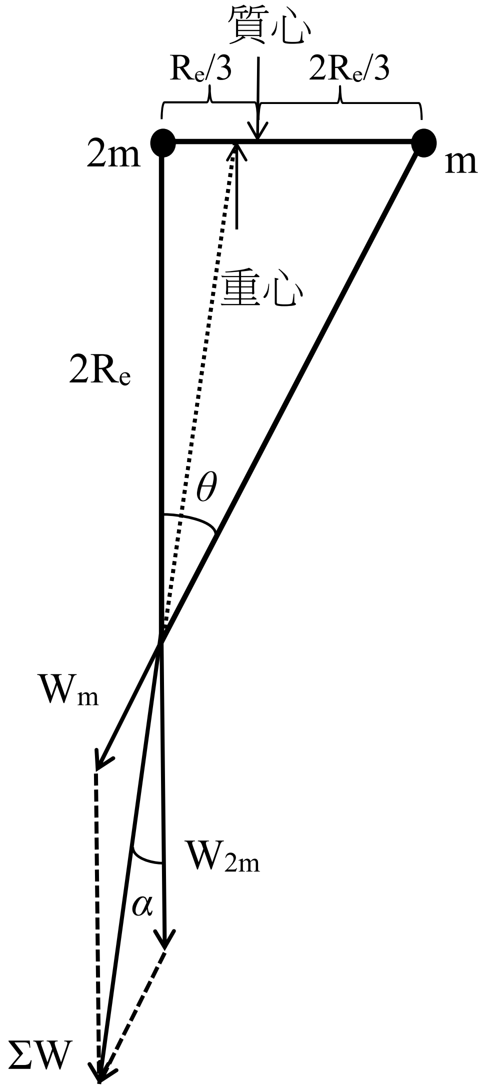
$$W_{2m}=\frac{GM\times 2m}{(2R_e)^2}=\frac{W}{2}$$

$$W_m=\frac{GM\times m}{(\sqrt{5}R_e)^2}=\frac{W}{5}$$

$$\Sigma W=\sqrt{(W_m\sin\theta)^2+(W_m\cos\theta+W_{2m})^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{W}$$

$$=0.6848\mathrm{W}$$



(b)

$$\alpha=\sin^{-1}\frac{W_m\sin\theta}{0.6848W}=\sin^{-1}0.1306$$

$$=7.505^o$$

(c)

$$\Sigma\tau=\frac{W}{2}\times\frac{R_e}{3}-\frac{W}{5}\times\frac{2R_e}{3}\times\cos\theta$$

$$=\frac{25-8\sqrt{5}}{150}WR_e$$

$$=4.741\times10^{-2}WR_e$$

(d)

$$0.6848\mathrm{W}\times\mathrm{L}\times\cos\alpha=4.741\times10^{-2}WR_e$$

$$\mathrm{L}=\frac{4.741\times10^{-2}}{0.6789}R_e=6.983\times10^{-2}R_e$$

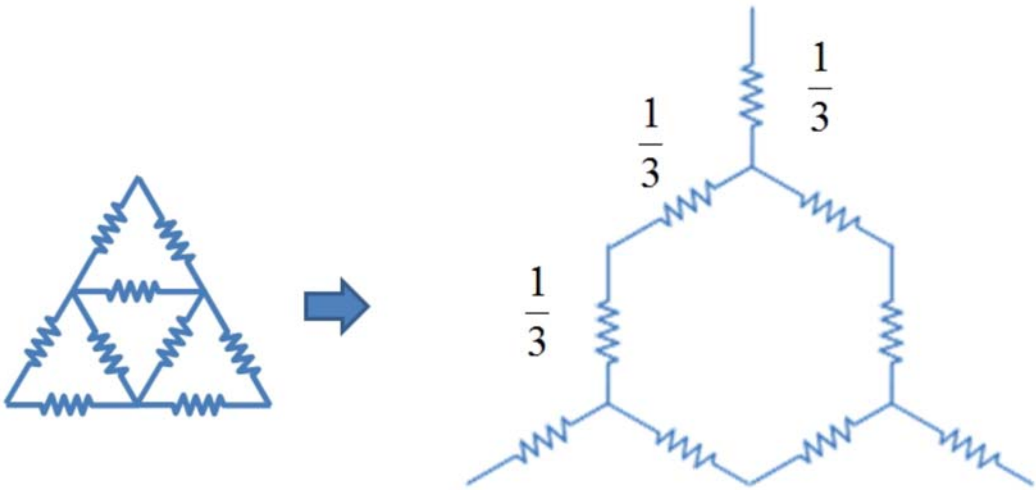
【第二題參考解】

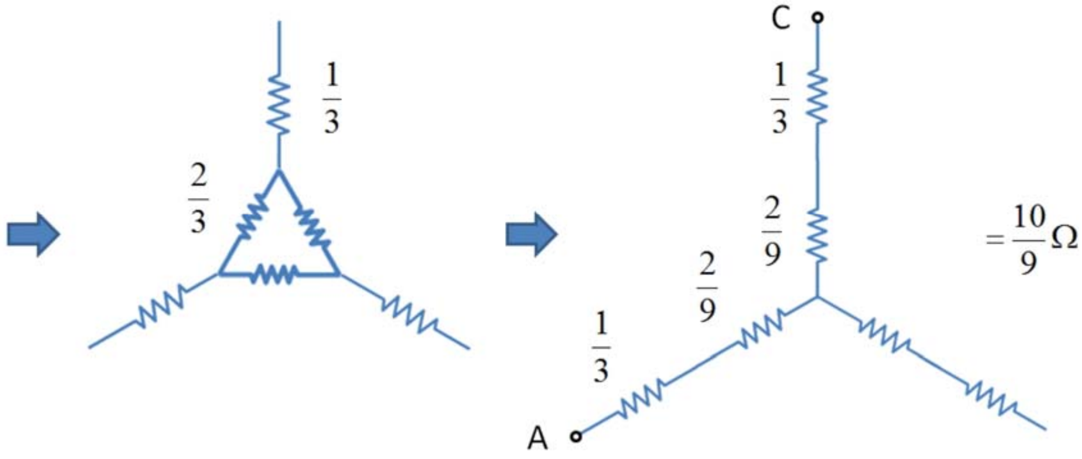
(a)

$$\begin{cases} R_A + R_B = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1 + R_3} + \dfrac{1}{R_2}} = \dfrac{R_1 R_2 + R_3 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_B + R_C = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1 + R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \dfrac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_A + R_C = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2 + R_3} + \dfrac{1}{R_1}} = \dfrac{R_2 R_1 + R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

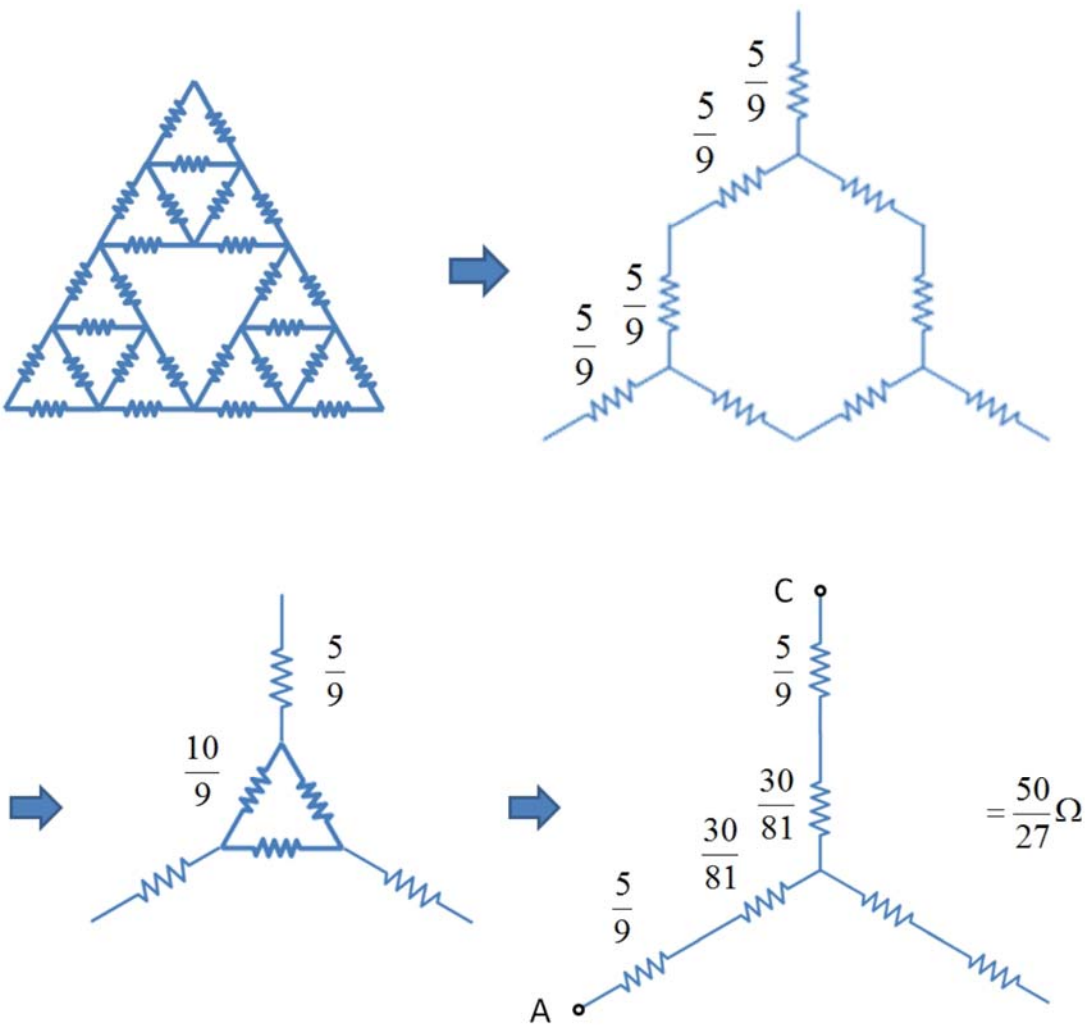
$$\Rightarrow \begin{cases} R_A = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_B = \dfrac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_C = \dfrac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

(b)





(c)



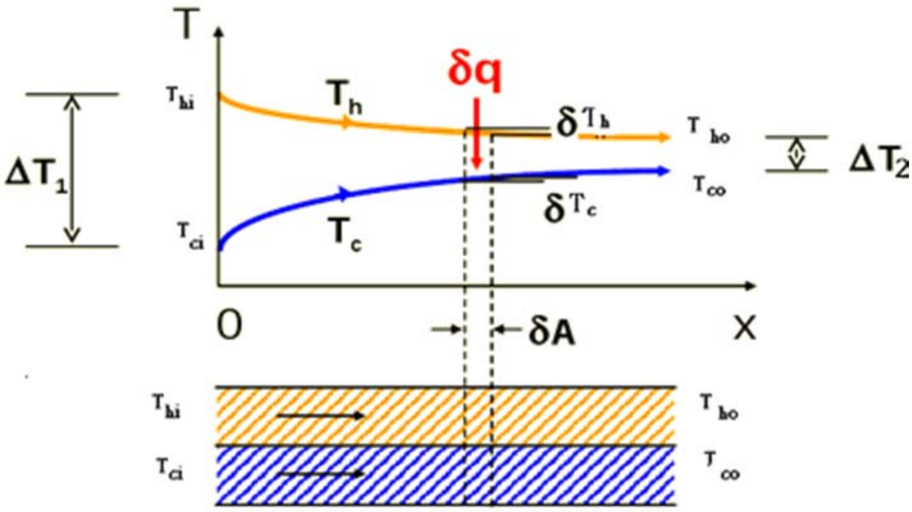
【第三題參考解】

(a) 高溫液體所損失的熱將會等於低溫液體所吸收的熱，也就是說熱量傳輸率(rate of heat transfer)可分別表示為

$$\mathrm{q} = -\dot{m}_H c_H (T_{ho} - T_{hi}),\ \ \mathrm{q} = \dot{m}_c c_c (T_{co} - T_{ci})$$

其中$\frac{dm_H}{dt} = \dot{m}_H$與$\frac{dm_C}{dt} = \dot{m}_c$分別為高低溫液體流量
T_{hi}, T_{ho} 分別為熱水管進、出的溫度而 T_{ci} ,T_{co}, 分別為冷水管進、出的溫度。

在熱交換器的任何一點上，如圖所示。



整體的熱交換率

$$q = h_h A(T_h - T_1) \quad hot\ film$$

$$q = \frac{k}{x} A(T_1 - T_2) \quad solid\ wall$$

$$q = h_c A(T_2 - T_c) \quad cold\ film$$

$$\xrightarrow{(solve)} q = \frac{A(T_h - T_c)}{\left(\frac{1}{h_h} + \frac{x}{k} + \frac{1}{h_c}\right)} = UA\Delta T$$

因此

$$\frac{1}{\mathrm{U}} = \frac{1}{\mathrm{h_H}} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{K}} + \frac{1}{\mathrm{h_C}}$$

則在此小區域內的熱交換率為

$$\delta\mathrm{q} = -\dot{\mathrm{m}}_\mathrm{H} \mathrm{c_H} \delta \mathrm{T_h}$$

$$\delta\mathrm{q} = \dot{\mathrm{m}}_\mathrm{c} \mathrm{c_c} \delta \mathrm{T_c}$$

$$\delta\mathrm{q} = \mathrm{U}(\mathrm{T_h} - \mathrm{T_c})\delta\mathrm{A}$$

整理一下

$$\delta T_h = -\frac{\delta q}{\dot{m}_h c_h}$$

$$\delta T_c = \frac{\delta q}{m_c c_c}$$

$$\Rightarrow \delta T_h - \delta T_c = -\delta q\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

$$\delta(T_h - T_c) = -U\delta A(T_h - T_c)\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_h c_c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(T_h - T_c)}{(T_h - T_c)} = -U\delta A\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

再將上式積分得

$$\log(T_{ho} - T_{co}) - \log(T_{hi} - T_{ci}) = -UA\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

把上式熱交換率中的流量帶入

$$\log(T_{ho} - T_{co}) - \log(T_{hi} - T_{ci}) = -UA\frac{(T_{hi} - T_{ho}) + (T_{co} - T_{ci})}{q}$$

$$\Rightarrow \log \Delta T_2 - log\Delta T_1 = \mathrm{UA}\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{q}$$

$$\therefore \quad \mathrm{q} = \mathrm{UA}\boxed{\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{log\Delta T_2 - log\Delta T_1}}$$

$$or \quad q = UA\boxed{\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{log\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}}$$

(b)

$$\mathrm{q} = -\dot{m}_H c_H(T_{ho} - T_{hi}),\ \ \mathrm{q} = \dot{m}_c c_c(T_{co} - T_{ci})$$

18 kg/s × 3.4 kJ/kg·K ×（105-45）K

= 4.2 kJ/kg K ×（40-25）K × $\dot{m}_c$

= 3672 kW = q

$\dot{m}_c$ = 58.28 kg/s

(c)

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_h} + \frac{x}{k} + \frac{1}{h_c}$$

$$U = 802\,\frac{W}{m^2K}$$

將數據帶入

$$q = UA\boxed{\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{log\,\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}}$$

3672 kW = A × 802 W/m2K ×((5 − 80)/log(5/80))

= 49953 × A

A = 73.5 m^2

【第四題參考解】

(a)

令物體至第一個透鏡的物距 $p_1=(100)cm$ ， 像距 q_1

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{20}$$

$$q_1=25cm$$

第二個透鏡的物距 $p_2=20-25=-5$ ，像距 q_2

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{-5}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{10}$$

$$q_2=\frac{10}{3}cm$$

放大率為像高與物高的比例關係，正比於像距與物距的比例關係

$$m=m_1m_2=(\frac{q_1}{p_1})(\frac{q_2}{p_2})=(-\frac{25}{100})(-\frac{10/3}{-5})=-\frac{1}{6}$$

(b)

令物體至第一個透鏡的物距 $p_1=(100+10t)cm$ ， 像距 q_1

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{100+10t}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{20}$$

$$q_1=\frac{20(10+t)}{8+t}$$

相對第二個透鏡的物距

$$p_1=20-\frac{20(10+t)}{8+t}=\frac{-40}{8+t}$$

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}$$

$$\frac{8+t}{-40}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{10}$$

$$q_2(t)=\frac{400}{12+t}$$

【第五題參考解】

(a) 離潛水員 y 處繩索之張力

F = 潛水員重量 $-$ 潛水員所受浮力 $+$ y長繩索重量

$-y$長繩索所受浮力

潛水員重量 $= 150(kg) \times 9.8(m/s^2) = 1470(N)$

潛水員所受浮力 $= 1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) \times 0.1(m^3) \times 9.8\left(\frac{m}{s^2}\right)$

$= 980(N)$

y 長繩索重量$=1.1(kg/m) \times y(m) \times 9.8(m/s^2) = 10.78y(N)$

y 長繩索所受浮力$=1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) \times \pi \times (0.01m)^2 y(m) \times 9.8\left(\frac{m}{s^2}\right)$

$= 3.08y(N)$

因此，離潛水員 y 處繩索之張力 $F(y) = 490 + 7.70y\ (N)$

(b) 繩上橫波之波速

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \sqrt{\frac{490 + 7.70y}{1.1}}$$

因此訊號傳回海面所需時間

$$T = \int_0^{100} \frac{dy}{v}$$

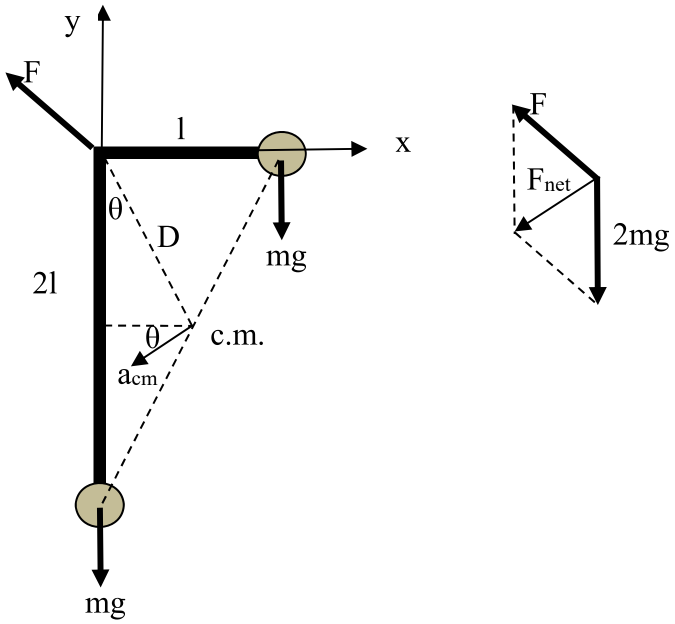
$$= \int_0^{100} \frac{\sqrt{1.1}}{\sqrt{490 + 7.70y}} dy$$

$$= \sqrt{1.1} \times \frac{2}{7.70} \times \sqrt{490 + 7.70y}\ \Big|_0^{100}$$

$$\cong 3.64(s)$$

【第六題參考解】

依據牛頓第三定律，鋼棒施予鐵釘的力等於負的鐵釘施予鋼棒的力F，如下圖。



則 $\vec{F}_{net} = 2m\vec{a}_{cm}$，其中$\vec{F}_{net}$為鋼棒所受之淨力，$\vec{a}_{cm}$為質心加速度。另外$\vec{F}_{net} = \vec{F} + 2m\vec{g}$，所以

$$\vec{F} = 2m(\vec{a}_{cm} - \vec{g})$$。

要求$\vec{F}$，就得先知道$\vec{a}_{cm}$。手放開時，系統開始圍繞著鐵釘做單擺運動，質心的加速度是以 D 為半徑的圓軌道之切線方向，所以

$$a_{cm} = D\alpha$$

α為角加速率。上式只成立在剛放手的一瞬間，之後系統將產生一向心加速度指向鐵釘。從圖得知

$$D = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{2l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}l$$

另外從牛頓第二定律的轉動版本知

$$\vec{\tau}_{net} = I\vec{\alpha}$$

I為轉動慣量。此系統僅有上方的球產生力矩，所以$\tau_{net} = mgl$，系統之轉動慣量為

$$I = ml + m(2l)^2 = 5ml^2$$

所以角加速率α $= \frac{g}{5l}$，質心加速率$a_{cm} = \frac{g}{2\sqrt{5}}$。質心加速度

$$\vec{a}_{cm} = -(cos\theta\ \hat{x} + sin\theta\ \hat{y})a_{cm}$$

其中$cos\theta = \frac{l}{D} = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$sin\theta = \frac{l/2}{D} = \frac{1}{\sqrt{5}}$。所以

$$\vec{a}_{cm} = -\left(\frac{2}{10}\,\hat{x} + \frac{1}{10}\,\hat{y}\right)g$$

因此

$$\vec{F} = 2m\left[-\left(\frac{2}{10}\,\hat{x} + \frac{1}{10}\,\hat{y}\right)g - (-\hat{y})g\right] = mg\left(\frac{-2}{5}\,\hat{x} + \frac{9}{5}\,\hat{y}\right)$$

所以鋼棒對鐵釘施力為$mg\left(\frac{2}{5}\,\hat{x} - \frac{9}{5}\,\hat{y}\right)$，值為$\sqrt{3.4}mg$。