

筆試試題（二）

編號：_____。

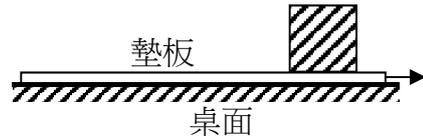
- 說明：(1) 請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
 (2) 本試題卷共六大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，
 試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

水平光滑桌面上放置一個輕質薄墊板，上方靜置一個正立方體、質量為 m 的均質木塊，初始時整個系統為靜止，如下圖。今以外力將薄墊板自靜止突然向右拉，考慮以下三種情況。假設木塊與墊板間的靜摩擦係數為 μ_s 、動摩擦係數為 μ_k ，墊板與桌面間沒有摩擦力，重力加速度為 g 。

I. 純滑動：

- (a) 若墊板自拉動之初（時間 $t = 0$ ）至之後的任何時間 t 都與木塊間始終保持滑動，則墊板相對於桌面向右的加速度 a_p 及速度 v_p 須滿足哪些條件？



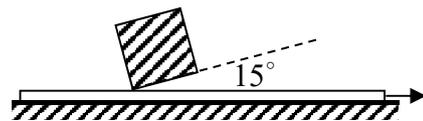
(5 分)

- (b) 若在初始 $t = 0$ 時，對墊板施以一個極大的瞬間向右加速度，並使之後 $t > 0$ 的任一瞬間都讓墊板相對於桌面向右的速度均保持在一個固定值 V 。過程中木塊相對於墊板滑動了一段距離後即停止，求在木塊相對於墊板停止的瞬間，木塊相對於桌面的位移量。(4 分)

- (c) 承 (b) 小題，假設木塊相對於墊板停止的瞬間為 t_s ，畫出「拉墊板的外力對系統所作之總功 W 」隨時間 t 的變化圖。橫軸時間 t 的範圍為零至 $2t_s$ 。(6 分)

II. 穩定斜立：

- (d) 今施以固定的力將墊板向右拉，並使木塊保持 15° 傾斜如右圖，過程中木塊與墊板間無滑動。求墊板相對於桌面的加速度 a_p 。(3 分)



- (e) 承 (d) 小題，要使該情況得以發生的話， μ_s 的條件為何？(2 分)

III. 旋轉：

(f) 今施力使墊板相對於桌面保持固定的向右加速度 a_p ，在此固定的加速度下，若要使木塊在圖中依逆時針方向旋轉 90 度且無滑動，則此加速度 a_p 的範圍為何？ (3 分)

(g) 承 (f) 小題，要使該情況得以發生的話， μ_s 的條件為何？ (2 分)

【第二題】

圖 1 表示一個長方體容器，裡面放了兩片透明隔板，隔板的厚度極薄可忽略不計。隔板 AB 與容器底部平面夾一角度 α ，並將容器的左下方隔出一個三角柱形的空間。隔板 BC 與容器底部平面垂直，並將容器的右側隔出一個長方體的空間。在容器內的三個空間分別注入折射率為 $n_1 = \sqrt{2}$ 與 $n_2 = \sqrt{10}$ 的液體，如圖 1 所示。在容器的左側底部有一光源 S，若調整夾角 α ，使 S 發出來的部分光線可通過 BC 隔板，射入容器右側的空間，則夾角 α 應滿足何種條件？ (25 分)

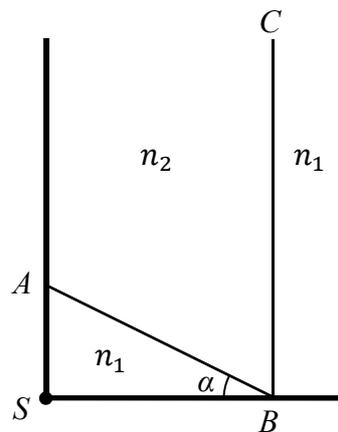


圖 1

【第三題】

在可壓縮的流體中的小振幅振動就是聲波。聲波會使此流體中有間隔的壓縮和稀疏的密度及壓力變化，我們可以把流體中某點的壓力 P 和密度 ρ 表示成：

$$P = P_0 + \Delta P, \quad \rho = \rho_0 + \Delta \rho,$$

其中 P_0 和 ρ_0 是沒有聲波時的平衡態下的壓力和密度， ΔP 和 $\Delta \rho$ 是聲波造成的微小變化， $\Delta P \ll P_0$ ， $\Delta \rho \ll \rho_0$ 。聲波的速度為 v_{sound} 。

聲波會傳遞能量。

- (a) 由聲波造成的（在行進波方向）小振幅振動的速度是 Δv ($\Delta v \ll v_{sound}$)，那麼在時間區間 Δt 內，流體會產生位移 $\Delta x = \Delta v \cdot \Delta t$ 。對於通過行進波方向上的一個截面積 A 的流體，壓力變化 ΔP 產生的力是 $F = \Delta P \cdot A$ 。計算此力做的功，並證明：單位面積單位時間內，聲波傳導的功率 q ，或稱能量流密度 (energy flux density)，是

$$\text{Energy flux density } q = \frac{W}{A \cdot \Delta t} = \Delta P \cdot \Delta v \quad (3\text{分})$$

- (b) 在時間區間 Δt 內，一個波會通過體積為 $\Delta(\text{volume}) = (v_{sound} \cdot \Delta t) \cdot A$ 的流體，使這個體積內的流體增加衝量 Δp ：

$$\Delta p \equiv \Delta(m \cdot v) = (v_{sound} \cdot \Delta t) \cdot A \cdot \rho \Delta v \quad \circ$$

試證明壓力變化 ΔP 與流體振動速度 Δv 的關係為：

$$\Delta P = v_{sound} \cdot \rho \cdot \Delta v \approx v_{sound} \cdot \rho_0 \cdot \Delta v \quad \circ$$

[hint: 考慮此壓力變化造成的力] (5 分)

- (c) 小幅振動的系統，動能平均會等於位能平均，所以總能量為動能平均的兩倍。流體單位體積的動能為 $\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot (\Delta v)^2$ 。若總體積為 V ，則全部的振動動能 E_k 為 $E_k = [\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot (\Delta v)^2] \cdot V$ 。所以總能量為總動能的兩倍： $E = [\rho_0 \cdot (\Delta v)^2] \cdot V$ ，能量密度（單位體積的能量）為 $u = \rho_0 \cdot (\Delta v)^2$ 。由 (a) 與 (b) 的結果，試證明聲波傳遞的能量流密度 q 與能量密度 u 的關係。

聲波不只會傳遞能量，也會傳遞動量。 (b) 中計算的流體衝量就是流體由波動得到的動量。對於單位體積的流體來說，得到的動量密度是

$$j = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta(\text{volume})} = \rho \cdot \Delta v = \rho_0 \cdot \Delta v + \Delta \rho \cdot \Delta v$$

對全部流體來說，第一項所貢獻的總動量為

$\sum_i (\rho_0 \cdot \Delta v_i) \cdot \Delta V = \rho_0 \cdot (\sum_i \Delta v_i) \cdot \Delta V = 0$ ，因為全部流體的速度變化量相加為零。所以流體由波動傳遞得到的動量密度是由第二項貢獻的：

$$j = \Delta \rho \cdot \Delta v \quad \circ \quad (6\text{分})$$

- (d) 聲波的波速與流體的密度變化量與壓力變化量有關，這三個物理量的關係式如下： $\Delta P = v_{sound}^2 \cdot \Delta \rho$ 。利用這個關係式，計算動量密度 $j = \Delta \rho \cdot \Delta v$ 與 (a) 定義的能量流密度 q 的關係。(6分)
- (e) (i) 試得出聲波傳遞之動量密度 j 與能量密度 $u = \rho_0 \cdot (\Delta v)^2$ 的關係。(ii) 將你的結果乘上體積就得到全部聲波的動量 ($p \equiv j \cdot V$) 與能量 ($E \equiv u \cdot V$)

的關係。(iii) 請將與光波的動量與能量關係比較 $E = p \cdot c$ ，其中 c 為光波的波速。(iv) 如果有一聲波的能量為 $E = \hbar \cdot \omega$ (其中 $\omega = v_{\text{sound}} \cdot k$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)，則聲波的動量 p 為何？(5分)

【第四題】

一帶有電量 $+Q$ 之中空金屬球殼半徑為 R_1 ，試回答下列各題：

- 求該金屬球殼表面與中心電位？(5分)
- 計算該金屬球殼的電容？(當電容器兩端的電位差或電壓 (V) 為單位值時，儲存在電容器電極的電荷量 (Q)，即為該電容器的電容 (C)， $Q=C \cdot V$) (5分)
- 已知距球心 r 處 ($r > R_1$) 的電場能量密度 (儲存在單位體積內的電場能量) 為 $(1/2)\epsilon_0 E^2$ ，求該金屬球殼建立之電場總能量？(5分)
- 另有一帶電量 $-Q$ 之中空金屬球殼半徑為 R_2 ($R_2 > R_1$)，與原帶有電量 $+Q$ 之中空金屬球殼組合為同心球形電容器，求帶正負電金屬球殼間的電位差？(5分)
- 考慮另一種狀況，在固定電位差下，調整同心球形電容器內金屬球殼的半徑多大時，才能使內金屬球殼表面附近的電場最小？(5分)

【第五題】

一水平光滑桌面上有數顆小球 (尺寸大小皆相同，質量 m 則有同有異)、數條相同彈簧 (質量可忽略，力常數皆為 k ，初始皆為原長 l_0 的狀態) 以及一光滑圓形凹槽 (半徑為 a)，如俯視圖所示，一開始，只有 B 球 (質量 m_B) 向左以速度大小 v 行進，其他小球則初速皆為零。B 球先後與 A 球 (緊靠另一端已固定的彈簧且 $m_A \gg m_B$) 及 C 球 ($m_C \ll m_B$) 發生正向彈性碰撞，接著 C 球與 D, E 兩球 ($m_D = m_E = m_C$) 發生對稱性彈性碰撞。然後 E 球進入光滑圓形凹槽 (入射方向為圓之切線方向，進入凹槽前後的重力位能變化忽略不計)，

- 若此時 E 球開始受一吸引力場的作用 (僅限圓形凹槽範圍)，吸引力大小為 $\frac{z \cdot m_E}{r^2}$ ，方向皆指向 U 點，式中 z 為常數， r 為 E 球到 U 點的距離。U 點為圓面上的一個定點，其距圓心 O 的距離為 b ($b < a$)。若 E 球的進入點為

【第六題】

今年九月的強颱風莫蘭蒂對台灣造成重大災情，於此讓我們簡單的探討一些颱風的物理：1991年 Kerry A. Emanuel 提出一簡化的颱風模型，模型中將颱風氣旋的氣體循環（如圖示）視為一種卡諾循環

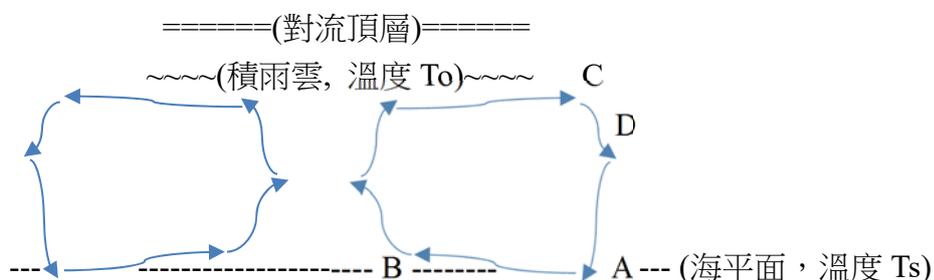
(a) 試將此氣體循環過程畫於 $P - V$ [壓力--體積] 圖上 (標出 A, B, C, D 各點)。(7分)

(b) 卡諾循環的效率 η 可表示為 $\eta = \frac{|W|}{|Q_{in}|} = \frac{T_S - T_O}{T_S}$ 。假設颱風的熱量來源 $|Q_{in}|$ 包含擾流的作功 $|W| = av^3$ 和海洋的熱傳導 bv (v 表氣體流速)，颱風於海面的作功僅限於產生擾流 ($|W| = av^3$)。試求：

(b-1) 係數 a 和 b 的單位 (以公尺(m)，公斤(kg)，秒(sec)等國際標準單位表示)。(5分)

(b-2) 定義 $E = \frac{b}{a}$ ，求出颱風於海面的風速 v (以 E, T_S, T_O 表示)。(8分)

(b-3) 依據前述的結果，判斷溫室效應造成海平面溫度 T_S 上升 (假設其他參數不變) 對颱風生成強度的影響為 (A)增強 (B)減弱 (C)沒有影響。(5分)



(颱風剖面示意圖，中心區為颱風眼)

圖示說明：

A→B：氣體於海平面等溫 (海面溫度為 $T_S \approx 300K$) 吸熱，由高壓區流向低壓區 (颱風中心)

B→C：氣體快速 (無熱交換) 上昇

C→D：氣體於上層大氣區 (溫度為 $T_O \approx 200K$) 等溫壓縮下降

D→A：氣體自上層大氣區快速 (無熱交換) 下降至海平面