105 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（一）

編號：______.

說明：（1）請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
（2）本試題卷共六大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

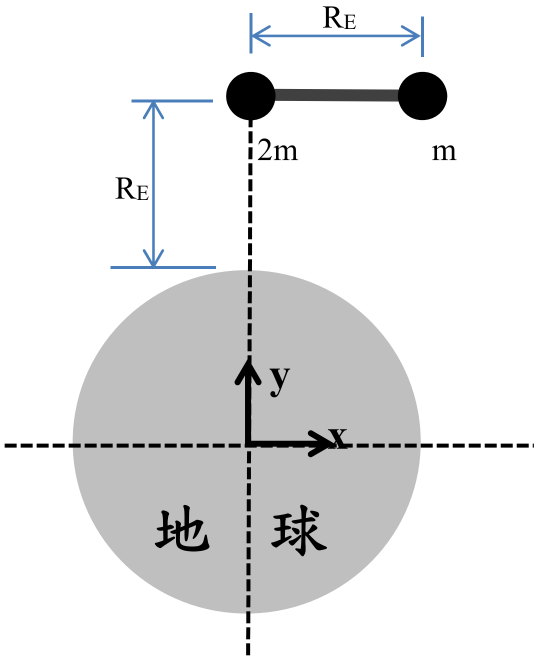
一艘外星太空船停泊在地球正上方，如下圖所示。該太空船由質量 2m 與 m 的分離艙所組成，兩者之間由與地球半徑 (R_E) 等長且質量可忽略之剛體通道相連接。通道平行 x 軸，地心為座標原點。假設質量 m 之物體在地表所受的重力為 W。

(a) 作用於太空船之淨重力的大小為何 (以 W 表示)？ (5 分)

(b) 作用於太空船之淨重力的方向與 -y 方向之夾角為幾度？ (5 分)

(c) 太空船相對於自身質心的淨力矩大小為何 (以 W 及 R_E 表示)？ (5 分)

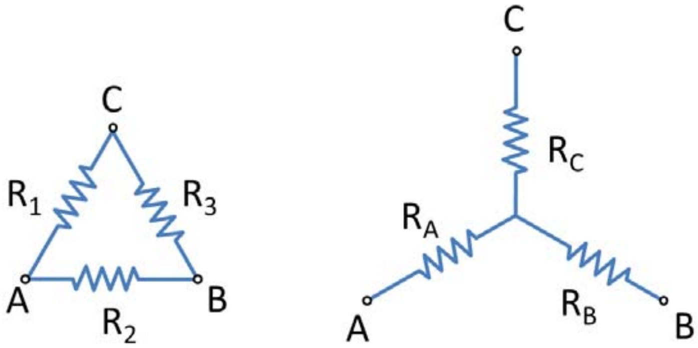
(d) 太空船自身的重心與質心距離大小為何 (以 R_E 表示)？ (10 分)



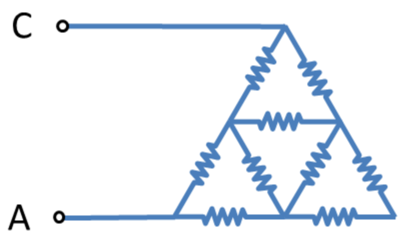
【第二題】

(a) 假如Δ形電阻器網路（下圖左）可以轉換成等效的星形電阻器網路（下圖右），請問 R_A、R_B、R_C 的電阻值為何？（以 R_1、R_2、R_3 表示）

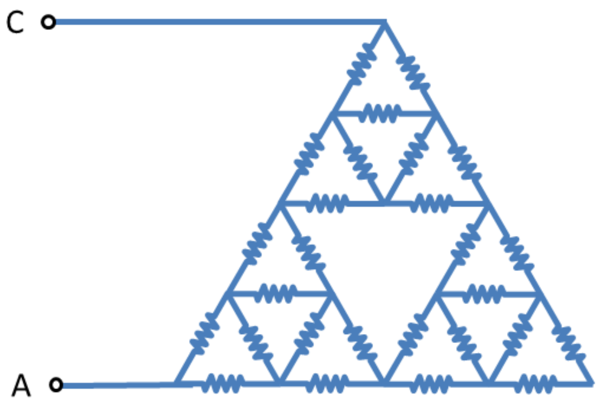
提示：Δ形網路的 AB/BC/AC 端點間的等效電阻值，與對應的星形網路之 AB/BC/AC 端點的等效電阻值相同。（10 分）



(b) 將 9 個 1Ω的電阻，組合成下圖之電阻器網路。利用小題 (a) 的結果，計算 AC 端點的等效電阻值。（10 分）



(c) 將 27 個 1Ω的電阻，組合成下圖之電阻器網路，計算 AC 端點的等效電阻值。（5 分）



【第三題】

一面積為 A，厚度為 X 的導熱平板 (如圖 1 所示)，若其兩面分別接觸不同溫度的流體中，其中高溫 (T_H) 的流體跟低溫 (T_C) 的流體的對流熱導係數分別為 h_H 與 h_C。一般導熱平板的熱傳導率 (rate of heat flow) 以 $q_S = \frac{K}{X} \cdot A \cdot \Delta T$ (單位為 W) 來表示，其中 ΔT 為平板兩面的溫度差，K 為平板的熱導係數。若流體的對流傳熱率以 $q_L = h \cdot A \cdot \Delta T$ (單位為 W) 來表示，其中 ΔT 為液體與接觸面的溫度差，h 為液體的對流熱導係數。則整個系統 (置於不同溫度液體中的導熱平板系統) 之熱傳導率可以用 $q_T = U \cdot A \cdot \Delta T$ (單位為 W) 來表示，其中 U 為整個系統的熱傳導係數。

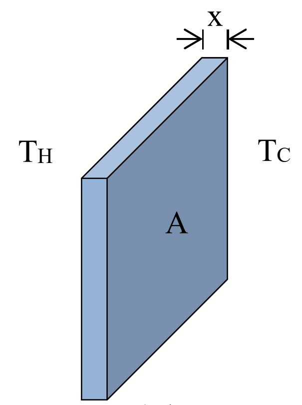


圖 1

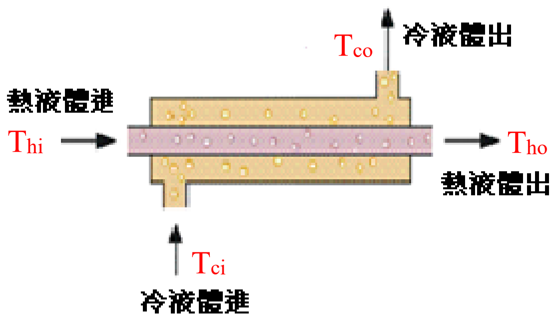


圖 2

一般冷卻用的熱交換器 (heat exchanger)，是利用不同溫度的液體在相鄰的金屬管中流動，而將熱量由高溫管中的液體，經過管壁傳到相鄰的低溫管中的液體，而達到使高溫管的液體降溫的目的。

圖 2 所示為一種稱為並流型的熱交換器，其冷水與熱水流向相同。若假設在整個過程中，兩導管之間的整體熱傳導係數 U 為定值，兩導管中所流動的液體比熱 (高溫液體 c_H 及低溫液體 c_C) 為常數，管中熱、冷液體的流量為定值，且在整個系統與外界隔熱的情況下，

(a) 請試著將整個系統的熱傳導率以液體進入端的冷熱溫度差、液體流出端的冷熱溫度差、以及兩管間的接觸面積 A 及 U 來表示。 (18 分)

(b) 若現在將一流量為 18 kg/s 且溫度為 105ºC 的高溫液體 (比熱為 3.4 kJ/kg·K) 以 25ºC 的低溫水 (比熱為 4.2 kJ/kg·K) 來冷卻，使其在出水口時的高溫液體溫度降至 45ºC，而冷卻水的溫度在出口處為 40ºC，則冷卻水的流量需為

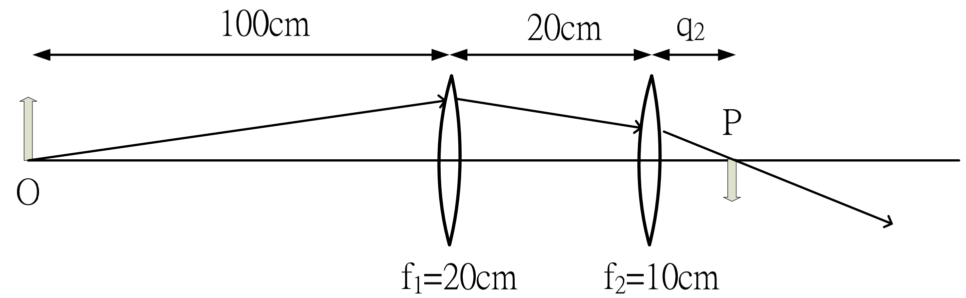
多少？ (4 分)

(c) 若接觸面的厚度為 3mm，接觸面材料的熱導係數 K 為 220 W/m·K，高溫液體 h_H 為 2500 W/m^2·K，低溫冷卻水的 h_C 為 1200 W/m^2·K，在不計接觸面的曲率下，所需的接觸面面積為多少？ (3 分)

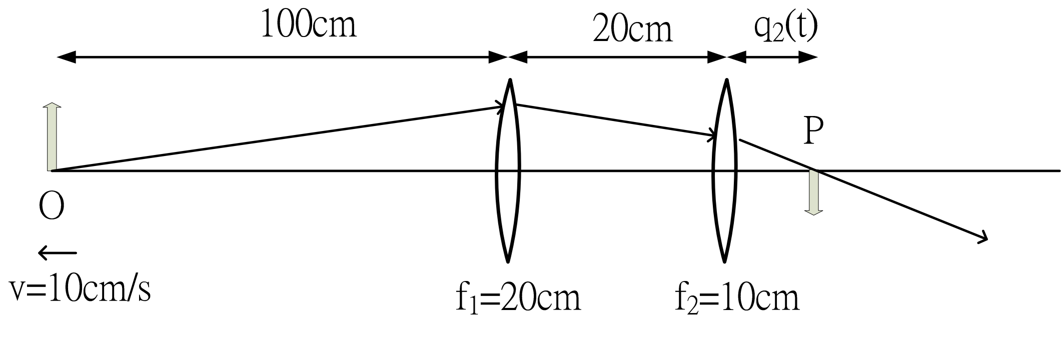
【第四題】

一個透鏡系統，由兩個聚焦透鏡組合而成，第一個透鏡的焦距 20cm，第二個透鏡的焦距 10cm，這兩個透鏡間相距 20cm。

(a) 在距離第一個聚焦透鏡前面 100cm 處，放置一個物體於 O 點，光線傳遞經過第一個與第二個透鏡後，成像在 P 點。試求此物體通過第一個透鏡成像的像距？P 點與第二個透鏡的距離 q_2？在 P 點的成像放大率？ (10 分)



(b) 承 (a) 小題，且此物體以速度 10cm/s 遠離透鏡系統。試求成像 P 點與第二個透鏡間的距離 q_2 隨著時間變化的關係函數 $q_2(t)$？成像移動的速度？ (15 分)



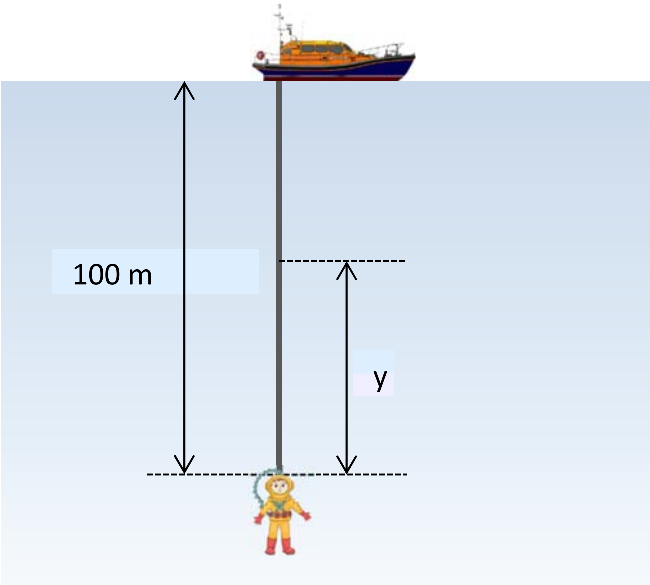
【第五題】

某深海潛水員 A 之體重加上裝備之總質量為 150 kg，總體積為 0.1 m^3。當執行深海潛水任務時，A 身上繫一繩索並懸吊於海面之船上，海水密度為

$1000\ \mathrm{kg/m^3}$。此繩索長度為 100 m，直徑 2 cm，繩索線密度為 1.1 kg/m。當 A 完成任務時，他會抖動繩索以通知海面工作人員，將其吊返海面。

(a) 請問離潛水員 y 處 (如下圖所示) 繩索之張力為何？ (16 分)

(b) 請估計抖動訊號傳回海面所需時間為何？ (9 分)



【第六題】

一支質量不計的輕鋼棒，兩端連接著兩個質量均為 m 的小球，此鋼棒被彎折成直角。在牆上垂直釘入一支鐵釘，將鋼棒轉折處掛在鐵釘上，鋼棒與牆並無接觸。一開始以手撐住使鋼棒靜止，鉛直部份長度是水平部份的兩倍，如圖 1 所示。

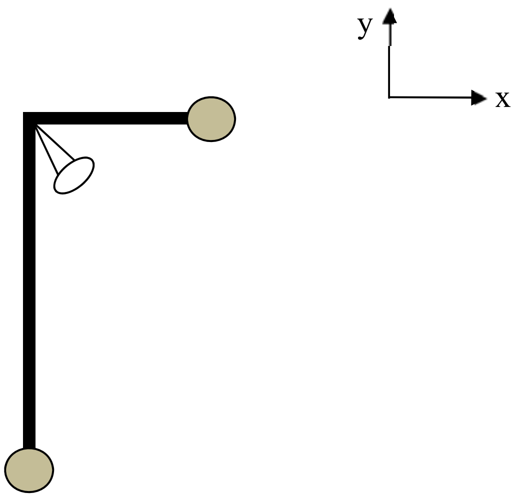


圖 1

現在將手放開，請問在放開的瞬間，鋼棒對鐵釘施力的方向及大小為何？(重力加速度為g，忽略鐵釘與鋼棒間的摩擦力。)（25 分）

105 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（一）參考解

【第一題參考解】

(a)

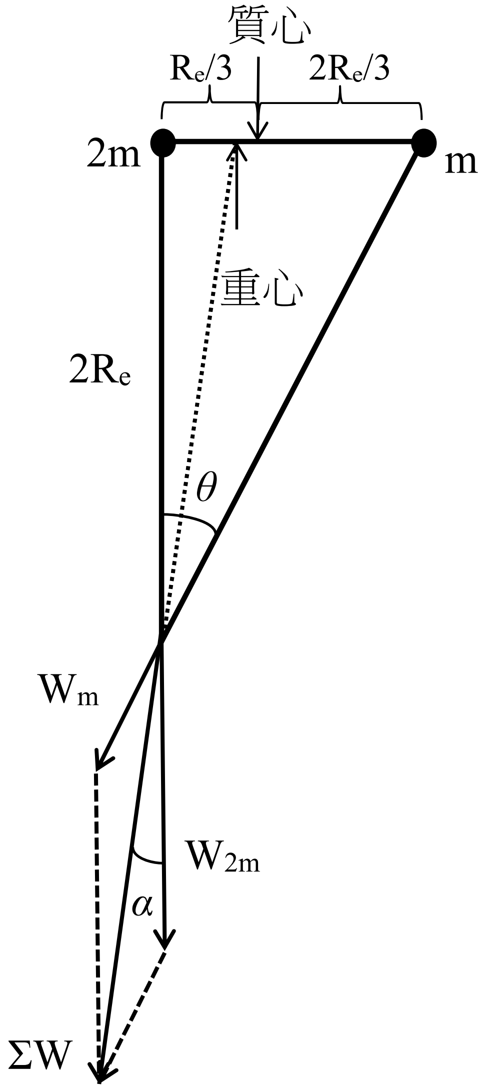
$$W_{2m}=\frac{GM\times 2m}{(2R_e)^2}=\frac{W}{2}$$

$$W_m=\frac{GM\times m}{(\sqrt{5}R_e)^2}=\frac{W}{5}$$

$$\Sigma\mathrm{W}=\sqrt{(W_m\sin\theta)^2+(W_m\cos\theta+W_{2m})^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{W}$$

$$=0.6848\mathrm{W}$$



(b)

$$\alpha=\sin^{-1}\frac{W_m\sin\theta}{0.6848W}=\sin^{-1}0.1306$$

$$=7.505^{o}$$

(c)

$$\Sigma\tau=\frac{W}{2}\times\frac{R_e}{3}-\frac{W}{5}\times\frac{2R_e}{3}\times\cos\theta$$

$$=\frac{25-8\sqrt{5}}{150}WR_e$$

$$=4.741\times10^{-2}WR_e$$

(d)

$$0.6848\mathrm{W}\times\mathrm{L}\times\cos\alpha=4.741\times10^{-2}WR_e$$

$$\mathrm{L}=\frac{4.741\times10^{-2}}{0.6789}R_e=6.983\times10^{-2}R_e$$

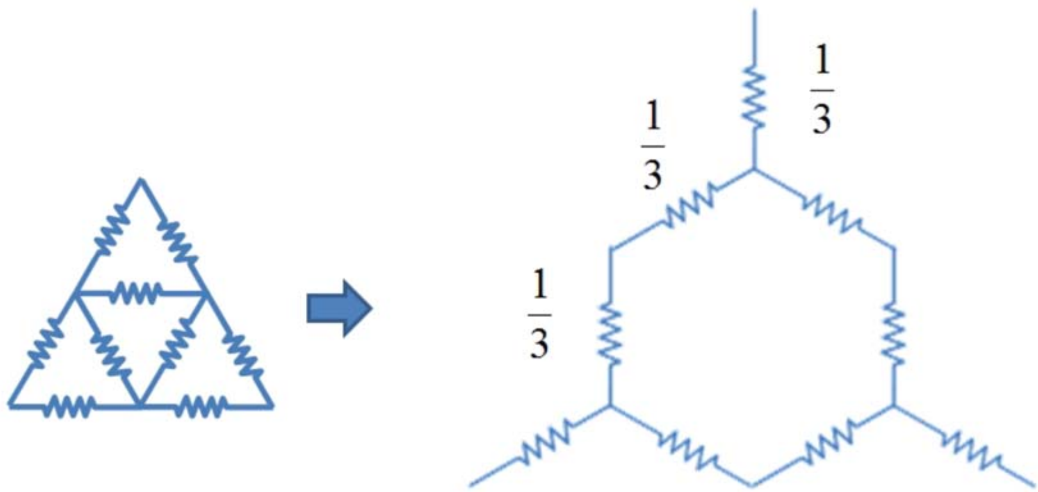
【第二題參考解】

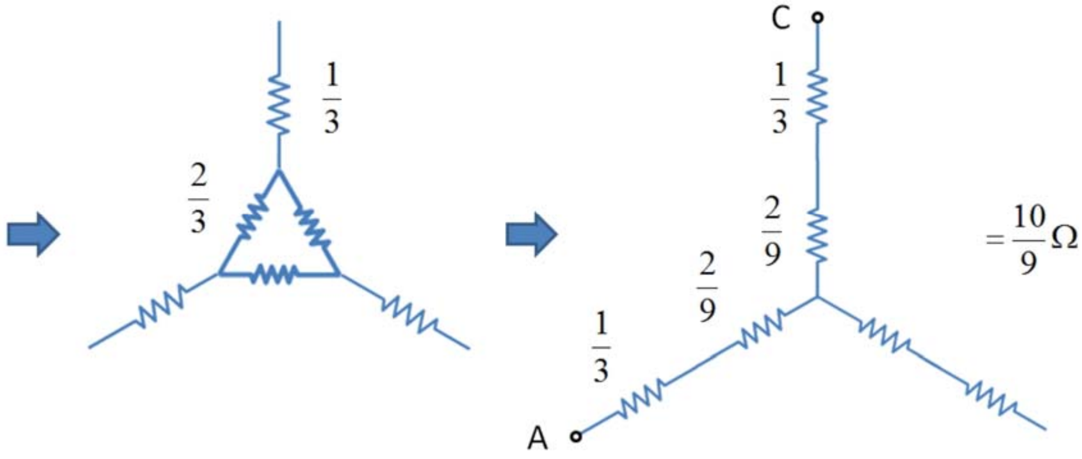
(a)

$$\begin{cases} R_A + R_B = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1 + R_3} + \dfrac{1}{R_2}} = \dfrac{R_1R_2 + R_3R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_B + R_C = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1 + R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \dfrac{R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_A + R_C = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2 + R_3} + \dfrac{1}{R_1}} = \dfrac{R_2R_1 + R_3R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_A = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_B = \dfrac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_C = \dfrac{R_3R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

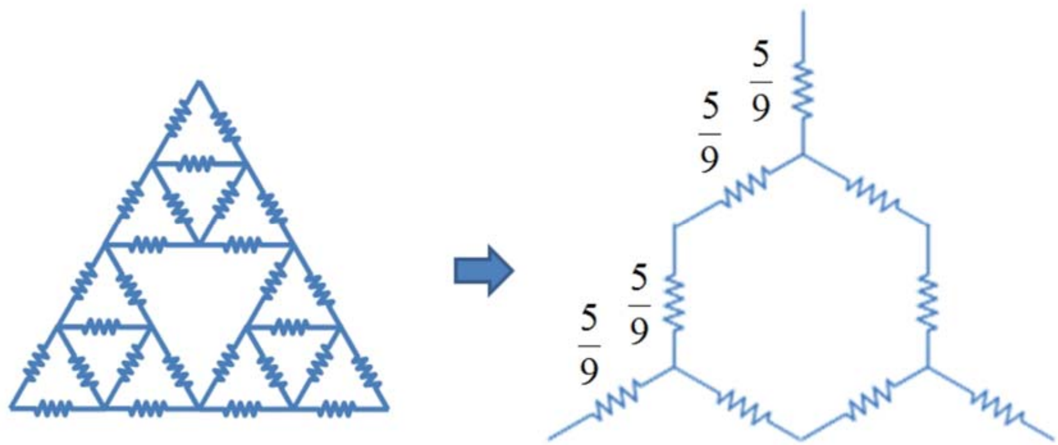
(b)



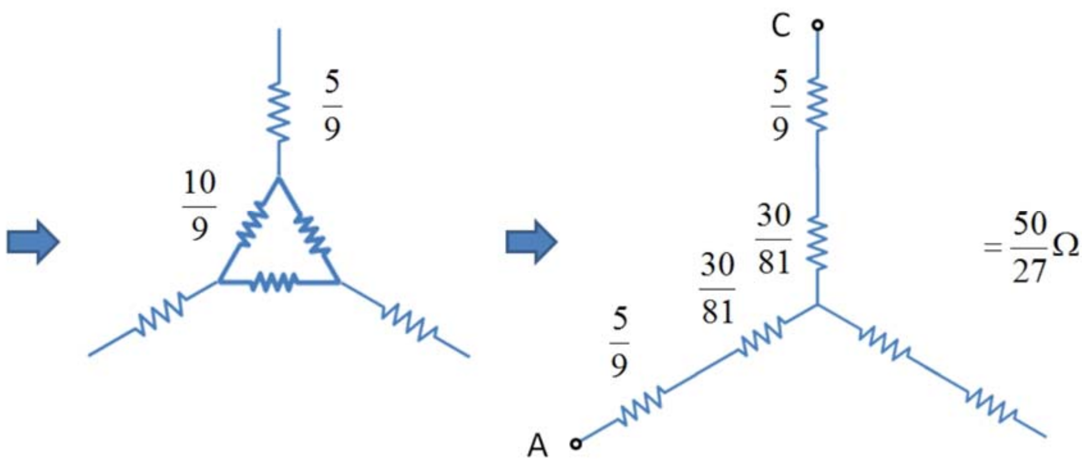


1/3
2/3
C
1/3
2/9
2/9
1/3
A
=10/9 Ω

(c)



5/9
5/9
5/9
5/9



5/9
10/9
C
5/9
30/81
30/81
5/9
A
=50/27 Ω

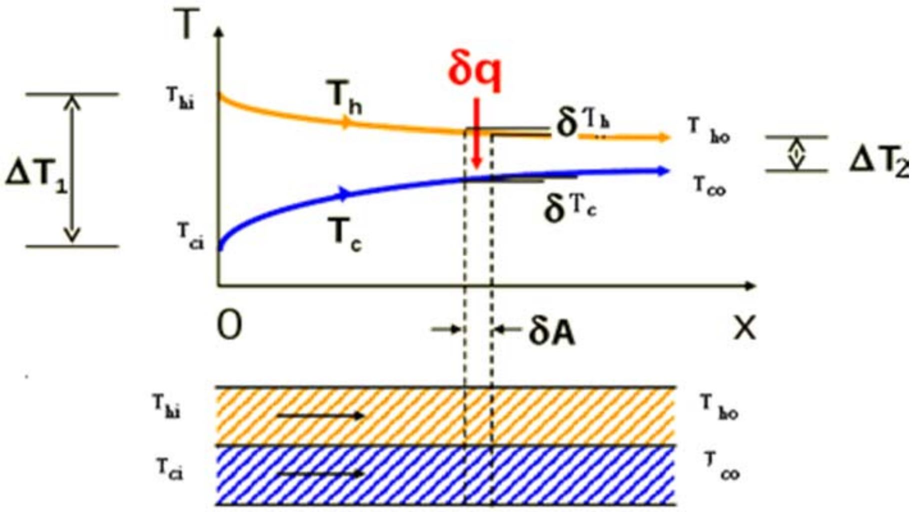
【第三題參考解】

(a) 高溫液體所損失的熱將會等於低溫液體所吸收的熱，也就是說熱量傳輸率(rate of heat transfer)可分別表示為

$$q = -\dot{m}_H c_H (T_{ho} - T_{hi}),\quad q = \dot{m}_c c_c (T_{co} - T_{ci})$$

其中$\frac{dm_H}{dt} = \dot{m}_H$與$\frac{dm_C}{dt} = \dot{m}_c$分別為高低溫液體流量
T_{hi}, T_{ho} 分別為熱水管進、出的溫度而 T_{ci} ,T_{co}, 分別為冷水管進、出的溫度。

在熱交換器的任何一點上，如圖所示。



整體的熱交換率

$$q = h_h A(T_h - T_1) \quad hot\ film$$

$$q = \frac{k}{x} A(T_1 - T_2) \quad solid\ wall$$

$$q = h_c A(T_2 - T_c) \quad cold\ film$$

$$\xrightarrow{(solve)} q = \frac{A(T_h - T_c)}{\left(\frac{1}{h_h} + \frac{x}{k} + \frac{1}{h_c}\right)} = UA\Delta T$$

因此

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_H} + \frac{x}{K} + \frac{1}{h_C}$$

則在此小區域內的熱交換率為

$$\delta q = -\dot{m}_H c_H \delta T_h$$

$$\delta q = \dot{m}_c c_c \delta T_c$$

$$\delta q = U(T_h - T_c)\delta A$$

整理一下

$$\delta T_h = -\frac{\delta q}{\dot{m}_h c_h}$$

$$\delta T_c = \frac{\delta q}{m_c c_c}$$

$$\Rightarrow \delta T_h - \delta T_c = -\delta q \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

$$\delta(T_h - T_c) = -U\delta A(T_h - T_c)\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_h c_c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(T_h - T_c)}{(T_h - T_c)} = -U\delta A\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

再將上式積分得

$$\log(T_{ho} - T_{co}) - \log(T_{hi} - T_{ci}) = -UA\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

把上式熱交換率中的流量帶入

$$\log(T_{ho} - T_{co}) - \log(T_{hi} - T_{ci}) = -UA\,\frac{(T_{hi} - T_{ho}) + (T_{co} - T_{ci})}{q}$$

$$\Rightarrow \log\Delta T_2 - log\Delta T_1 = \mathrm{UA}\,\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{q}$$

$$\therefore \quad \mathrm{q} = \mathrm{UA}\boxed{\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{log\Delta T_2 - log\Delta T_1}}$$

$$or \quad q = UA\boxed{\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{log\,\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}}$$

(b)

$$\mathrm{q} = -\dot{m}_H c_H(T_{ho} - T_{hi}),\ \ \mathrm{q} = \dot{m}_c c_c(T_{co} - T_{ci})$$

18 kg/s × 3.4 kJ/kg·K ×（105-45）K

= 4.2 kJ/kg K ×（40-25）K × $\dot{m}_c$

= 3672 kW = q

$\dot{m}_c$ = 58.28 kg/s

(c)

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_h} + \frac{x}{k} + \frac{1}{h_c}$$

$$U = 802\frac{W}{m^2K}$$

將數據帶入

$$q = UA\boxed{\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{log\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}}$$

3672 kW = A × 802 W/m2K ×((5－80)/log(5/80))

= 49953 ×A

A = 73.5 m^2

【第四題參考解】

(a)

令物體至第一個透鏡的物距 $p_1=(100)cm$ ， 像距 q_1

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{20}$$

$$q_1=25cm$$

第二個透鏡的物距 $p_2=20-25=-5$ ，像距 q_2

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{-5}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{10}$$

$$q_2=\frac{10}{3}cm$$

放大率為像高與物高的比例關係，正比於像距與物距的比例關係

$$m=m_1m_2=(\frac{q_1}{p_1})(\frac{q_2}{p_2})=(-\frac{25}{100})(-\frac{10/3}{-5})=-\frac{1}{6}$$

(b)

令物體至第一個透鏡的物距 $p_1=(100+10t)cm$ ， 像距 q_1

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{100+10t}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{20}$$

$$q_1=\frac{20(10+t)}{8+t}$$

相對第二個透鏡的物距

$$p_1=20-\frac{20(10+t)}{8+t}=\frac{-40}{8+t}$$

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}$$

$$\frac{8+t}{-40}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{10}$$

$$q_2(t)=\frac{400}{12+t}$$

【第五題參考解】

(a) 離潛水員 y 處繩索之張力

F = 潛水員重量 − 潛水員所受浮力 + y長繩索重量
−y長繩索所受浮力

潛水員重量 $= 150(kg) \times 9.8(m/s^2) = 1470(N)$

潛水員所受浮力 $= 1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) \times 0.1(m^3) \times 9.8\left(\frac{m}{s^2}\right)$

$= 980(N)$

y 長繩索重量$=1.1(kg/m) \times y(m) \times 9.8(m/s^2) = 10.78y(N)$

y 長繩索所受浮力$=1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) \times \pi \times (0.01m)^2 y(m) \times 9.8\left(\frac{m}{s^2}\right)$

$= 3.08y(N)$

因此，離潛水員 y 處繩索之張力 $F(y) = 490 + 7.70y\ (N)$

(b) 繩上橫波之波速

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \sqrt{\frac{490 + 7.70y}{1.1}}$$

因此訊號傳回海面所需時間

$$T = \int_0^{100} \frac{dy}{v}$$

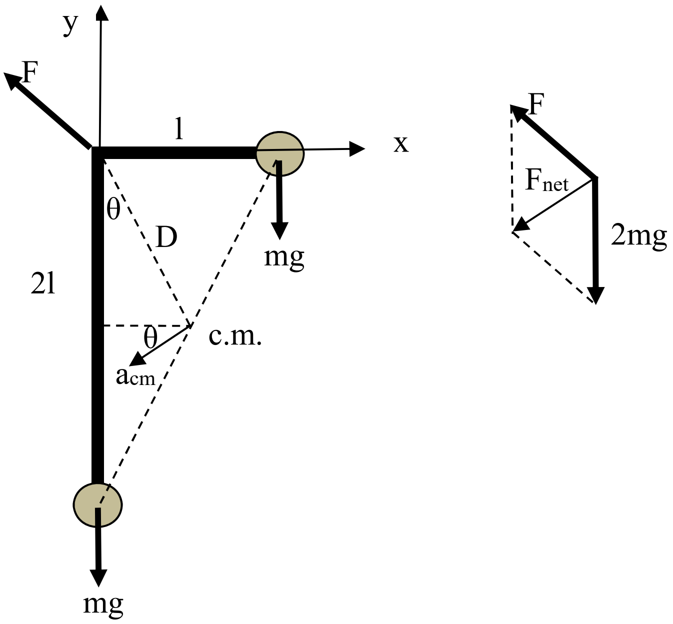
$$= \int_0^{100} \frac{\sqrt{1.1}}{\sqrt{490 + 7.70y}} dy$$

$$= \sqrt{1.1} \times \frac{2}{7.70} \times \sqrt{490 + 7.70y}\ \Big|_0^{100}$$

$$\cong 3.64(s)$$

【第六題參考解】

依據牛頓第三定律，鋼棒施予鐵釘的力等於負的鐵釘施予鋼棒的力F，如下圖。



則 $\vec{F}_{net} = 2m\vec{a}_{cm}$，其中$\vec{F}_{net}$為鋼棒所受之淨力，$\vec{a}_{cm}$為質心加速度。另外$\vec{F}_{net} = \vec{F} + 2m\vec{g}$，所以

$$\vec{F} = 2m(\vec{a}_{cm} - \vec{g})。$$

要求$\vec{F}$，就得先知道$\vec{a}_{cm}$。手放開時，系統開始圍繞著鐵釘做單擺運動，質心的加速度是以 D 為半徑的圓軌道之切線方向，所以

$$a_{cm} = D\alpha$$

α為角加速率。上式只成立在剛放手的一瞬間，之後系統將產生一向心加速度指向鐵釘。從圖得知

$$D = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{2l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}l$$

另外從牛頓第二定律的轉動版本知

$$\vec{\tau}_{net} = I\vec{\alpha}$$

I為轉動慣量。此系統僅有上方的球產生力矩，所以$\tau_{net} = mgl$，系統之轉動慣量為

$$I = ml + m(2l)^2 = 5ml^2$$

所以角加速率$\alpha = \frac{g}{5l}$，質心加速率$a_{cm} = \frac{g}{2\sqrt{5}}$。質心加速度

$$\vec{a}_{cm} = -(cos\theta\ \hat{x} + sin\theta\ \hat{y})a_{cm}$$

其中$cos\theta = \frac{l}{D} = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$sin\theta = \frac{l/2}{D} = \frac{1}{\sqrt{5}}$。所以

$$\vec{a}_{cm} = -\left(\frac{2}{10}\,\hat{x} + \frac{1}{10}\,\hat{y}\right)g$$

因此

$$\vec{F} = 2m\left[-\left(\frac{2}{10}\,\hat{x} + \frac{1}{10}\,\hat{y}\right)g - (-\hat{y})g\right] = mg\left(\frac{-2}{5}\,\hat{x} + \frac{9}{5}\,\hat{y}\right)$$

所以鋼棒對鐵釘施力為$mg\left(\frac{2}{5}\,\hat{x} - \frac{9}{5}\,\hat{y}\right)$，值為$\sqrt{3.4}mg$。

105 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（二）

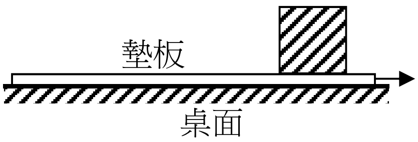
編號：______.

說明：（1）請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
（2）本試題卷共六大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

水平光滑桌面上放置一個輕質薄墊板，上方靜置一個正立方體、質量為 m 的均質木塊，初始時整個系統為靜止，如下圖。今以外力將薄墊板自靜止突然向右拉，考慮以下三種情況。假設木塊與墊板間的靜摩擦係數為 μ_s、動摩擦係數為 μ_k，墊板與桌面間沒有摩擦力，重力加速度為 g。

I. 純滑動：

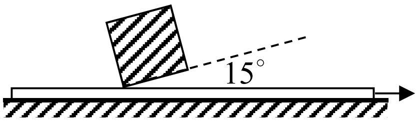


(a) 若墊板自拉動之初 (時間 $t = 0$) 至之後的任何時間 t 都與木塊間始終保持滑動，則墊板相對於桌面向右的加速度 a_p 及速度 v_p 須滿足哪些條件？(5 分)

(b) 若在初始 $t = 0$ 時，對墊板施以一個極大的瞬間向右加速度，並使之後 $t > 0$ 的任一瞬間都讓墊板相對於桌面向右的速度均保持在一個固定值 V。過程中木塊相對於墊板滑動了一段距離後即停止，求在木塊相對於墊板停止的瞬間，木塊相對於桌面的位移量。 (4 分)

(c) 承 (b) 小題，假設木塊相對於墊板停止的瞬間為 t_s，畫出「拉墊板的外力對系統所作之總功 W」隨時間 t 的變化圖。橫軸時間 t 的範圍為零至 $2t_s$。 (6 分)

II. 穩定斜立：



(d) 今施以固定的力將墊板向右拉，並使木塊保持 15 度傾斜如右圖，過程中木塊與墊板間無滑動。求墊板相對於桌面的加速度 a_p。 (3 分)

(e) 承 (d) 小題，要使該情況得以發生的話，μ_s 的條件為何？ (2 分)

III. 旋轉：

(f) 今施力使墊板相對於桌面保持固定的向右加速度 a_{p}，在此固定的加速度下，若要使木塊在圖中依逆時針方向旋轉 90 度且無滑動，則此加速度 a_{p} 的範圍為何？ (3 分)

(g) 承 (f) 小題，要使該情況得以發生的話，μ_{s} 的條件為何？ (2 分)

【第二題】

圖 1 表示一個長方體容器，裡面放了兩片透明隔板，隔板的厚度極薄可忽略不計。隔板 AB 與容器底部平面夾一角度 α，並將容器的左下方隔出一個三角柱形的空間。隔板 BC 與容器底部平面垂直，並將容器的右側隔出一個長方體的空間。在容器內的三個空間分別注入折射率為 $n_1 = \sqrt{2}$ 與 $n_2 = \sqrt{10}$ 的液體，如圖 1 所示。在容器的左側底部有一光源 S，若調整夾角 α，使 S 發出來的部分光線可通過 BC 隔板，射入容器右側的空間，則夾角 α 應滿足何種條件？ (25 分)

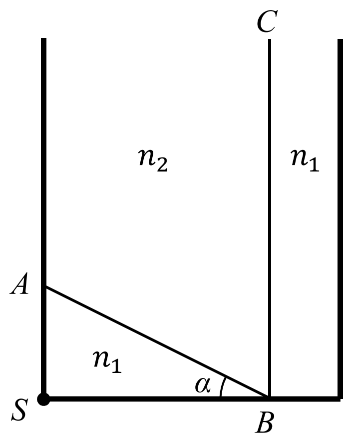


圖 1

【第三題】

在可壓縮的流體中的小振幅振動就是聲波。聲波會使此流體中有間隔的壓縮和稀疏的密度及壓力變化，我們可以把流體中某點的壓力 P 和密度 ρ 表示成：

$$P = P_0 + \Delta P, \quad \rho = \rho_0 + \Delta\rho,$$

其中 P_0 和 ρ_0 是沒有聲波時的平衡態下的壓力和密度，ΔP 和 $\Delta\rho$ 是聲波造成的微小變化，$\Delta P \ll P_0$, $\Delta\rho \ll \rho_0$ 。聲波的速度為 v_{sound} 。

<u>聲波會傳遞能量</u>。

(a) 由聲波造成的 (在行進波方向) 小振幅振動的速度是 Δv ($\Delta v \ll v_{sound}$) ，那麼在時間區間 Δt 內，流體會產生位移 $\Delta x = \Delta v \cdot \Delta t$ 。對於通過行進波方向上的一個截面積 A 的流體，壓力變化 ΔP 產生的力是 $F = \Delta P \cdot A$ 。計算此力做的功，並證明：單位面積單位時間內，聲波傳導的功率 $\mathbf{q}$ ，或稱能量流密度 (energy flux density) ，是

$$\text{Energy flux density } \mathrm{q} = \frac{W}{A \cdot \Delta t} = \Delta P \cdot \Delta v \quad (3分)$$

(b) 在時間區間 Δt 內，一個波會通過體積為 $\Delta(\text{volume}) = (v_{sound} \cdot \Delta t) \cdot A$ 的流體，使這個體積內的流體增加衝量 Δp：

$$\Delta \mathrm{p} \equiv \Delta(m \cdot v) = (v_{sound} \cdot \Delta t) \cdot A \cdot \rho \Delta v \text{ 。}$$

試證明壓力變化 ΔP 與流體振動速度 Δv 的關係為：

$$\Delta P = v_{sound} \cdot \rho \cdot \Delta v \approx v_{sound} \cdot \rho_0 \cdot \Delta v \text{ 。}$$

[hint: 考慮此壓力變化造成的力] (5 分)

(c) 小幅振動的系統，動能平均會等於位能平均，所以總能量為動能平均的兩倍。流體單位體積的動能為 $\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot (\Delta v)^2$ 。若總體積為 V ，則全部的振動動能 E_k 為 $E_k = [\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot (\Delta v)^2] \cdot V$ 。所以總能量為總動能的兩倍：$E = [\rho_0 \cdot (\Delta v)^2] \cdot V$ ，能量密度 (單位體積的能量) 為 $u = \rho_0 \cdot (\Delta v)^2$ 。由 (a) 與 (b) 的結果，試證明聲波傳遞的能量流密度 $\mathbf{q}$ 與能量密度 u 的關係。

<u>聲波不只會傳遞能量，也會傳遞動量</u>。 (b) 中計算的流體衝量就是流體由波動得到的動量。對於單位體積的流體來說，得到的動量密度是

$$\mathrm{j} = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta(\text{volume})} = \rho \cdot \Delta v = \rho_0 \cdot \Delta v + \Delta\rho \cdot \Delta v$$

對全部流體來說，第一項所貢獻的總動量為

$\sum_i (\rho_0 \cdot \Delta v_i) \cdot \Delta \mathrm{V} = \rho_0 \cdot (\sum_i \Delta v_i) \cdot \Delta V = 0$ ，因為全部流體的速度變化量相加為零。所以流體由波動傳遞得到的動量密度是由第二項貢獻的：

$\mathrm{j} = \Delta\rho \cdot \Delta v$ 。 (6 分)

(d) 聲波的波速與流體的密度變化量與壓力變化量有關，這三個物理量的關係式如下：$\Delta P = v_{sound}^2 \cdot \Delta\rho$ 。利用這個關係式，計算動量密度 $\mathrm{j} = \Delta\rho \cdot \Delta v$ 與 (a) 定義的能量流密度 $\mathbf{q}$ 的關係。 (6分)

(e) (i) 試得出聲波傳遞之動量密度 $\mathbf{j}$ 與能量密度 $u = \rho_0 \cdot (\Delta v)^2$ 的關係。 (ii) 將你的結果乘上體積就得到全部聲波的動量 ($p \equiv \mathrm{j} \cdot V$) 與能量 ($E \equiv u \cdot V$)

的關係。 (iii) 請將與光波的動量與能量關係比較 $E = p \cdot c$ ，其中 c 為光波的波速。 (iv) 如果有一聲波的能量為 $E = \hbar \cdot \omega$ (其中 $\omega = v_{sound} \cdot k$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) ，則聲波的動量 $\boldsymbol{p}$ 為何？ (5分)

【第四題】

一帶有電量 +Q 之中空金屬球殼半徑為 R_1，試回答下列各題：

(a) 求該金屬球殼表面與中心電位？ (5 分)

(b) 計算該金屬球殼的電容？ (當電容器兩端的電位差或電壓 (V) 為單位值時，儲存在電容器電極的電荷量 (Q)，即為該電容器的電容 (C)，Q=C·V) (5 分)

(c) 已知距球心 r 處 ($r > R_1$) 的電場能量密度 (儲存在單位體積內的電場能量) 為 $(1/2)\varepsilon_0 E^2$ ，求該金屬球殼建立之電場總能量？ (5 分)

(d) 另有一帶電量 –Q 之中空金屬球殼半徑為 R_2 ($R_2 > R_1$) ，與原帶有電量 +Q 之中空金屬球殼組合為同心球形電容器，求帶正負電金屬球殼間的電位差？ (5 分)

(e) 考慮另一種狀況，在固定電位差下，調整同心球形電容器內金屬球殼的半徑多大時，才能使內金屬球殼表面附近的電場最小？ (5 分)

【第五題】

一水平光滑桌面上有數顆小球 (尺寸大小皆相同，質量 m 則有同有異)、數條相同彈簧 (質量可忽略，力常數皆為 k，初始皆為原長 l_0 的狀態) 以及一光滑圓形凹槽 (半徑為 a)，如俯視圖所示，一開始，只有 B 球 (質量 m_B) 向左以速度大小 v 行進，其他小球則初速皆為零。B 球先後與 A 球 (緊靠另一端已固定的彈簧且 $m_A \gg m_B$) 及 C 球 ($m_C \ll m_B$) 發生正向彈性碰撞，接著 C 球與 D, E 兩球 ($m_D = m_E = m_C$) 發生對稱性彈性碰撞。然後 E 球進入光滑圓形凹槽 (入射方向為圓之切線方向，進入凹槽前後的重力位能變化忽略不計)，

(a) 若此時 E 球開始受一吸引力場的作用 (僅限圓形凹槽範圍)，吸引力大小為 $\frac{z \cdot m_E}{r^2}$ ，方向皆指向 U 點，式中 z 為常數， r 為 E 球到 U 點的距離。U 點為圓面上的一個定點，其距圓心 O 的距離為 b ($b < a$)。若 E 球的進入點為

圓上最靠近 U 點之處，欲使 E 球可完整的繞圓周運動，則 v 至少須超過何值？ (以 z, a, b 表示之) (8 分)

(b) D 球接著與 F 球 ($m_F = m_D$) 發生二維彈性碰撞，若 D 球在碰撞後沿與原入射方向夾 41° 的方向離開，則 F 球在碰撞後的方向與 D 球原入射方向的夾角為何？ (5 分)

(c) 若 D 球在二維彈性碰撞後速度為 v_{D2}，接著又與 G 球 ($m_G = m_D$) 發生正向彈性碰撞，G 球所連結的彈簧其另一端為可旋轉之固定點 W，碰撞前 W 和 G 球心的連線與 v_{D2} 方向垂直，若碰撞後過一段時間 G 球開始作等速率圓周運動，則此時彈簧的伸長量為何？ (以 v_{D2}，k，l_0，m_G 表示之) (7 分)

(d) P, Q 兩球 ($m_P = m_Q = m_F$) 及 J, S 兩球 ($m_J = 2m_F,\ m_S = 3m_F$) 之間分別以彈簧連接，F 球接著又與 H, I 兩球 ($m_H = m_I = m_F$) 發生對稱性彈性碰撞，之後 H, P, Q 三球球心及 I, J, S 三球球心各可連成一直線。若 H, P 兩球發生完全非彈性碰撞 (假設在 H, P 兩球的極短碰撞期間，Q 球保持靜止不動，且彈簧長度保持不變)，則碰撞後彈簧長度的最大壓縮量為 x_1；若 I, J 兩球也發生完全非彈性碰撞 (假設在 I, J 兩球的極短碰撞期間，S 球保持靜止不動，且彈簧長度保持不變)，則碰撞後彈簧長度的最大壓縮量為 x_2，請問 x_2 是 x_1 的幾倍？ (5 分)

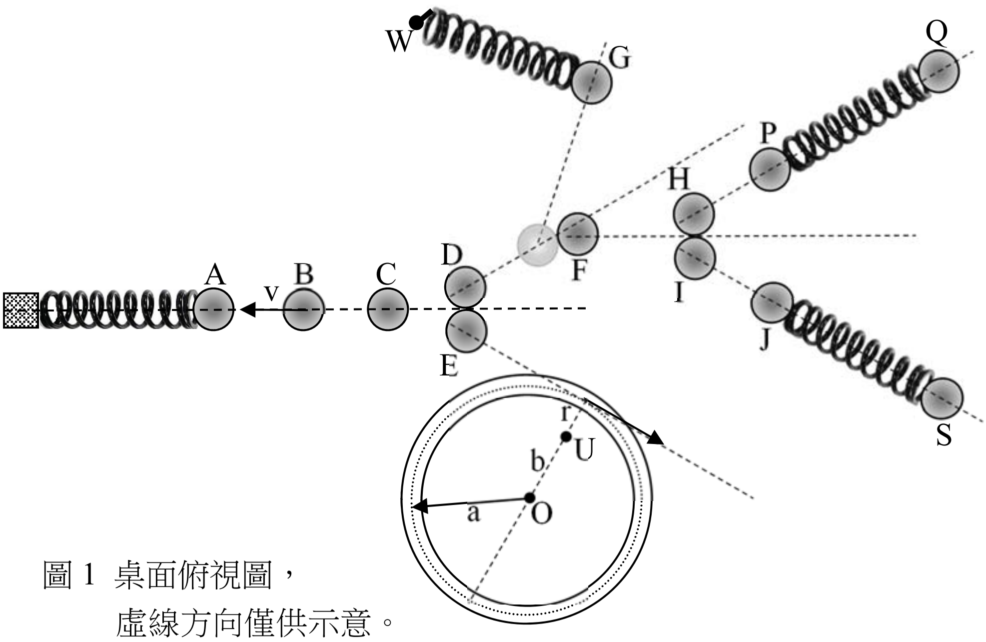


圖 1 桌面俯視圖，
虛線方向僅供示意。

【第六題】

今年九月的強颱莫蘭蒂對台灣造成重大災情，於此讓我們簡單的探討一些颱風的物理：1991 年 Kerry A. Emanuel 提出一簡化的颱風模型，模型中將颱風氣旋的氣體循環 (如圖示) 視為一種卡諾循環

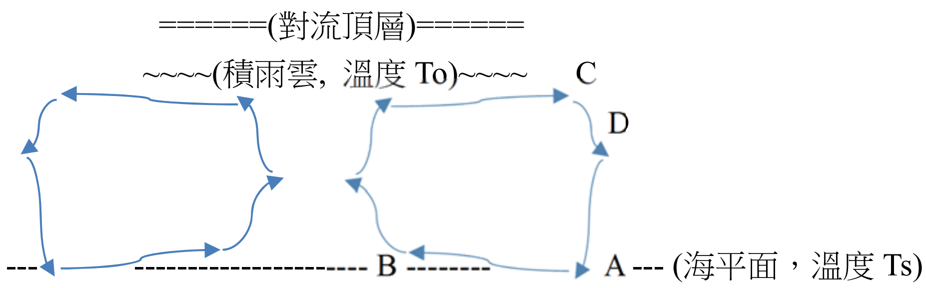
(a) 試將此氣體循環過程畫於 $P-V$ [壓力--體積] 圖上 (標出 A, B, C, D 各點)。(7 分)

(b) 卡諾循環的效率 η 可表示為 $\eta=\frac{|W|}{|Q_{in}|}=\frac{T_S-T_O}{T_S}$ 。假設颱風的熱量來源 $|Q_{in}|$ 包含擾流的作功 $|W|=av^3$ 和海洋的熱傳導 bv (v 表氣體流速)，颱風於海面的作功僅限於產生擾流 ($|W|=av^3$)。試求：

(b-1) 係數 a 和 b 的單位 (以公尺(m)，公斤(kg)，秒(sec)等國際標準單位表示)。 (5 分)

(b-2) 定義 $\mathrm{E}=\frac{b}{a}$ ，求出颱風於海面的風速 v (以 E, T_S, T_O 表示)。 (8 分)

(b-3) 依據前述的結果，判斷溫室效應造成海平面溫度 T_S 上升 (假設其他參數不變) 對颱風生成強度的影響為 (A)增強 (B)減弱 (C)沒有影響。(5 分)



(颱風剖面示意圖, 中心區為颱風眼)

圖示說明：

A→B： 氣體於海平面等溫 (海面溫度為$T_S\approx 300K$) 吸熱，由高壓區流向低壓區 (颱風中心)

B→C： 氣體快速 (無熱交換) 上昇

C→D： 氣體於上層大氣區 (溫度為$T_O\approx 200K$) 等溫壓縮下降

D→A： 氣體自上層大氣區快速 (無熱交換) 下降至海平面

105 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（二）參考解

【第一題參考解】

(a) 若將墊板作為參考座標系，則墊板相對於桌面向右的加速度 a_{p} 可視為墊板座標系中一個額外向左的加速度力場，也就是在墊板座標系中，木槐除了受到一個向下的重力加速度之外，還受到一個向左的加速度 a_{p}。因此若要讓木塊自墊板拉動之初就與墊板間始終保持滑動，有須滿足兩個條件：

(1) 在墊板座標系中，木塊所受向左的**初始**力要大於靜摩擦力：

$$F_{\mathrm{i}} = ma_{\mathrm{p(i)}} > mg\mu_{\mathrm{s}} \Rightarrow \boxed{a_{\mathrm{p(i)}} > g\mu_{\mathrm{s}}}$$

(2) 在之後的滑動過程中，墊板相對於桌面向右的速率必須始終大於木塊相對於桌面向右的速率：

由於木塊相對於桌面向右的速率是由方向向右的動摩力所造成的，也就是其任一瞬時 t 的速率為：

$$v_{\mathrm{p}} > v_{木} = a_{木}t = \frac{f_{\mathrm{k}}}{m}t = \frac{mg\mu_{\mathrm{k}}}{m}t = g\mu_{\mathrm{k}}t \Rightarrow \boxed{v_{\mathrm{p}} > g\mu_{\mathrm{k}}t}$$

註：學生很可能會將上述第二個條件，誤設如下，給分標準如下：

(2*) 開始之後任一瞬時，墊板相對於桌面向右的加速度為：

$$a_{\mathrm{p}} > g\mu_{\mathrm{k}}$$

若有寫(1)，則這個條件為充要條件，但非必要條件，故只給 1 分。

若(1)沒有寫，則這個條件並不能保證滑動，故不給分。

(2**) 開始之後任一瞬時，墊板所受向右的拉力等於動摩擦力：

$$F = ma = f_{\mathrm{k}} = mg\mu_{\mathrm{k}} \Rightarrow a = g\mu_{\mathrm{k}}$$

無論(1)是否成立，這個條件並不能保證滑動，故不給分。

(b) 木塊自始即滑動，故滑動摩擦力造成其向右的加速度為

$$a = g\mu_{\mathrm{k}}$$

此加速度將木塊加速至與墊板相同速率 V 後木塊即相對於墊板停止下來，則

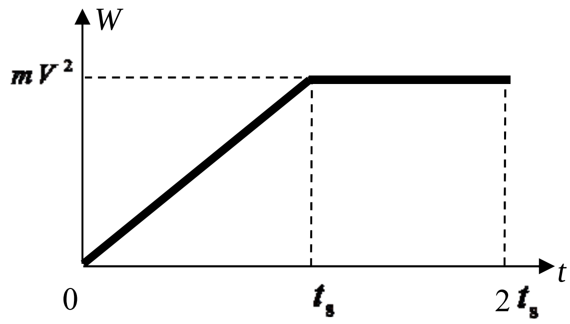
$$V^2 = 2as = 2g\mu_{\mathrm{k}}S \Rightarrow S = \boxed{\frac{V^2}{2g\mu_{\mathrm{k}}}}$$

(c) 在墊板的座標係中，木塊的初速為 V、末速為零，加速度同上，

故位移同上，故墊板相對於桌面的總位移為上述位移的兩倍，因此所作的總功為木塊相對於桌面之最終動能的兩倍，即

$$2\cdot\frac{1}{2}mV^2 = mV^2$$

然而過程中，施於墊板的力大小即為木塊施於墊板的摩擦力(方向相反)、墊板相對於桌面為等速 V，故位移隨時間 t 呈線性增加，以致所施的功 W 亦隨時間呈線性增加，所以「拉墊板的外力對系統所作之總功 W」隨時間 t 的變化圖為：(6%)



(d) 本題有好幾種解法，其中一個是以木塊左下角為支點、在墊板座標系中來考慮，此時向左力場及重力所造成的兩個力矩必須相互抵消，設質心到支點的距離為 R，則：

$$ma_{\mathrm{p}}R\sin 60° = mgR\cos 60° \Rightarrow a_{\mathrm{p}} = g\cot 60° = \boxed{\frac{g}{\sqrt{3}}}$$

(e) 要確保此情況發生，則摩擦力要夠大，即

$$mg\mu_{\mathrm{s}} > ma_{\mathrm{p}} = m\frac{g}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\mu_{\mathrm{s}} > \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(f) 以木塊左下角為支點、在墊板座標系中來考慮，若要逆時針旋轉，必須滿足兩個條件：

(1) 此時向左力場所造成的力矩必須大於重力所造成的力矩，設質心到支點的距離為 R，則：

$$ma_{\mathrm{p}}R\sin\theta > mgR\cos\theta \Rightarrow a_{\mathrm{p}} > g\cot\theta$$

上式中的角度值在過程中會由 45 增為 135 度，即 $\cot\theta$ 的值會由 1 減為 0 再減為-1，故可得第一個條件為

$a_{\mathrm{p}} > g$ (2%)

(2) 因題目要求過程中無滑動，因此必須要求在初始時：

$a_{\mathrm{p}} \le g\mu_{\mathrm{s}}$ (1%)

過程中，由於有力矩造成逆時針轉動，故質心受有一向上及向左的淨加速度，以致正向力大於重力，因此只要上式一滿

足，在過程中就不會有滑動。

綜合以上兩項條件，可得：

$$\boxed{g < a_{\mathrm{p}} \le g\mu_{\mathrm{s}}}$$

(g) 若上式要成立，則必須要求

$$g < g\mu_{\mathrm{s}} \Rightarrow \boxed{\mu_{\mathrm{s}} > 1}$$

【第二題參考解】

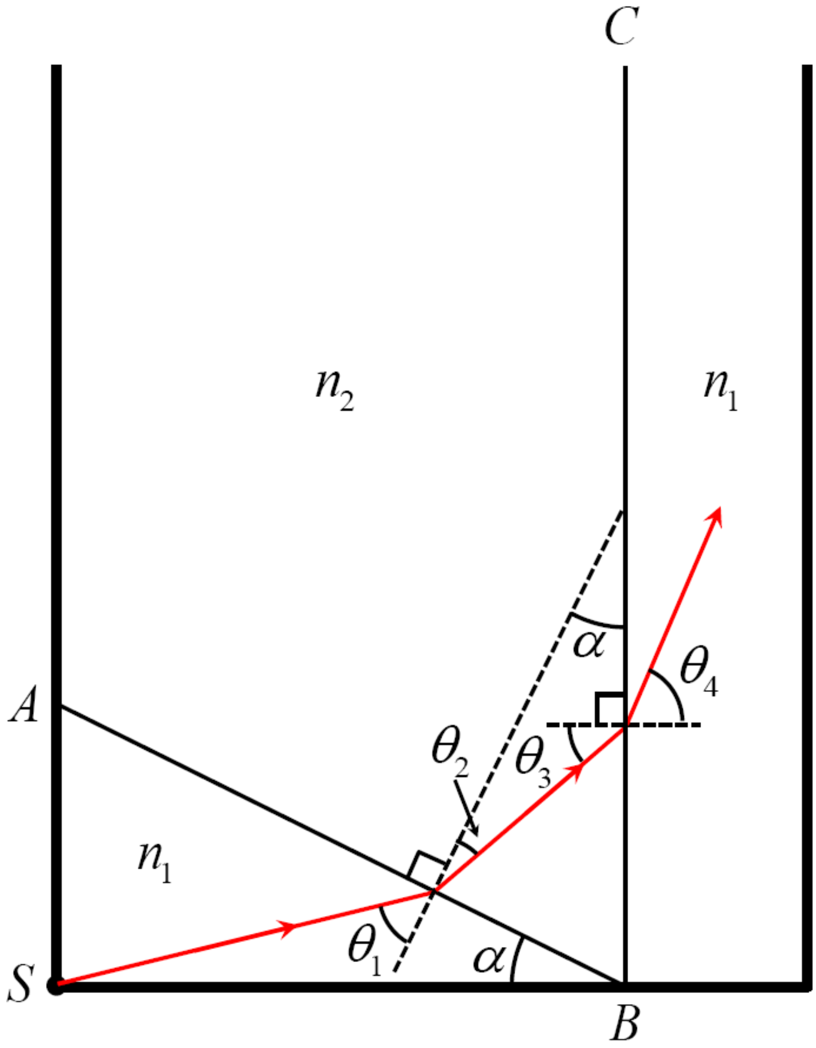


圖 2

參考圖2，光線由S出發，到達AB界面時發生折射。由折射定律知

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

⇨ $\sqrt{2}\sin\theta_1 = \sqrt{10}\sin\theta_2$　　　(1)

則由(1)式得

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta_1 \qquad (2)$$

⇨ $\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta_1\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5-\sin^2\theta_1}$　　　(3)

光線到達BC界面時再次折射，由折射定律知

$$n_2 \sin\theta_3 = n_1 \sin\theta_4$$

⇨ $\sqrt{10}\sin\theta_3 = \sqrt{2}\sin\theta_4$

發生全反射的臨界角θ_c滿足

$$\sqrt{10}\sin\theta_c = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}$$

⇨ $\sin\theta_c = \frac{1}{\sqrt{5}}$　　　(4)

若光線要由BC界面射出，必須

$$\theta_3 < \theta_c$$

即

$$\sin\theta_3 < \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (5)$$

由圖2知

$$\theta_3 = \pi - (\pi/2 + \theta_2 + \alpha) = \pi/2 - (\theta_2 + \alpha)$$

⇨ $\sin\theta_3 = \sin\left[\pi/2 - (\theta_2+\alpha)\right] = \cos(\theta_2+\alpha) = \cos\theta_2\cos\alpha - \sin\theta_2\sin\alpha$

將(2)式與(3)式代入上式得

$$\sin\theta_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5-\sin^2\theta_1}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta_1\sin\alpha \qquad (6)$$

由(6)式可知，θ_3隨第一個入射角θ_1而變，θ_1增大時，θ_3減小。令最大的入射角θ_1為$\theta_{1,\max}$，其所對應的最小的θ_3為$\theta_{3,\min}$。如果$\theta_{3,\min}$比臨界角θ_c還要大，則完全不會有光線從BC界面射出。因此，若要有部分光線從BC界面射出，至少必須滿足

$$\theta_{3,\min} < \theta_c \Rightarrow \sin\theta_{3,\min} < \sin\theta_c = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (7)$$

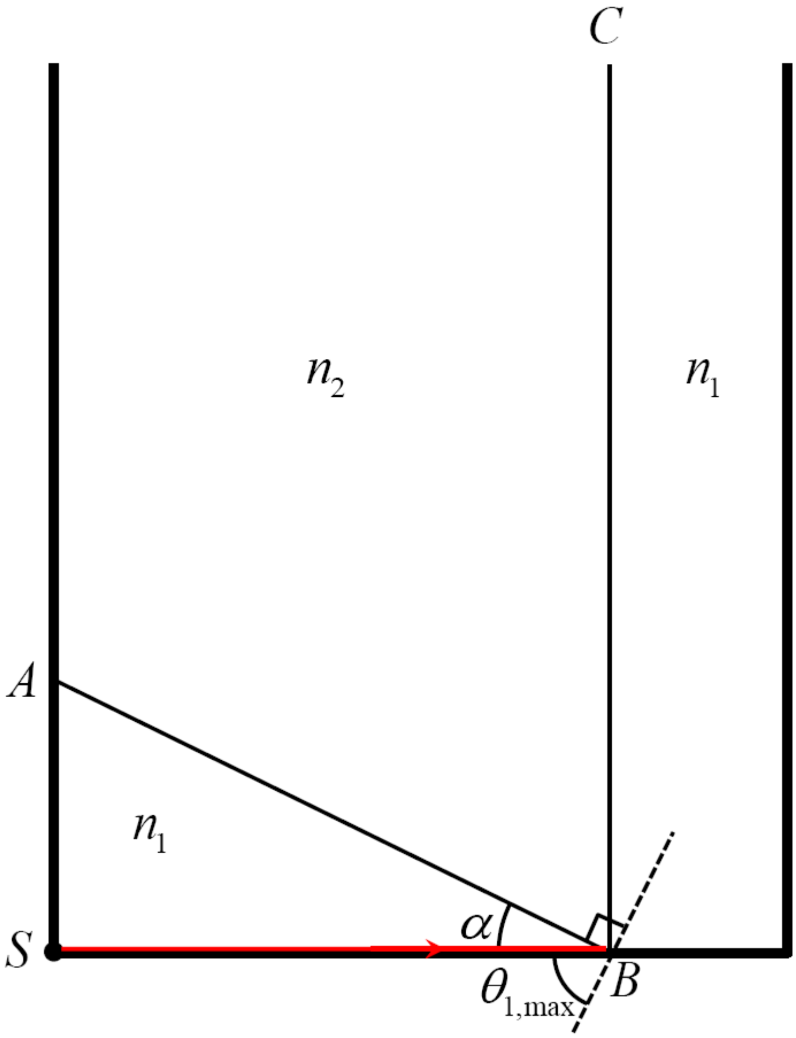


圖 3

由圖3知，當S發出的光以近乎平行容器底部平面的方向入射AB界面時，入射角為最大，此時

$$\theta_{1,\max}=\frac{\pi}{2}-\alpha \qquad (8)$$

⇨ $\sin\theta_{1,\max}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad (9)$

由(6)式可知$\theta_{1,\max}$對應的$\theta_{3,\min}$為

$$\sin\theta_{3,\min}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5-\sin^2\theta_{1,\max}}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta_{1,\max}\sin\alpha$$

將(9)式代入上式得

$$\sin\theta_{3,\min}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5-\cos^2\alpha}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\alpha\sin\alpha$$

由(7)式得

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5-\cos^2\alpha}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\alpha\sin\alpha<\frac{1}{\sqrt{5}}$$

⇨ $\sqrt{5-\cos^2\alpha}\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha<1$

⇨ $\sqrt{5-\cos^2\alpha}\cos\alpha<1+\cos\alpha\sin\alpha$

⇨ $(5-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha<1+2\cos\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)$

⇨ $(5-1)\cos^2\alpha<1+2\cos\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha$

⇨ $4\cos^2\alpha<(\cos\alpha+\sin\alpha)^2$

⇨ $2\cos\alpha<\cos\alpha+\sin\alpha$

⇨ $2<1+\tan\alpha$

⇨ $\tan\alpha>1$

⇨ $\boxed{\alpha>45^\circ}$

此為α應滿足之條件。

【第三題參考解】

(a) 壓力變化做的功為：

$$W = F\Delta x = (\Delta PA)\cdot(\Delta v\Delta t)$$

那麼單位面積單位時間內，聲波傳導的功率 q，或稱能量密度 (energy flux density)，就是

$$\text{Energy flux density}\ \ q = \frac{W}{A\Delta t} = \Delta P\Delta v$$

(b) 在時間區間Δt內，一個波會通過體積為 $\Delta(volume) = (v_{sound}\Delta t)$A 的流體，使這個體積內的流體增加衝量$\Delta p$：

$$\Delta p \equiv \Delta(mv) = (v_{sound}\Delta t)A\rho\Delta v$$

又

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F = \Delta PA = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{(v_{sound}\Delta t)A\rho\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta P = v_{sound}\rho\Delta v$$

$$= v_{sound}(\rho_0 + \Delta\rho)\Delta v \quad (\Delta\rho \ll \rho_0)$$

$$\approx v_{sound}\rho_0\Delta v$$

得到壓力變化ΔP與流體震動速度Δv的關係為：

$$\Delta P = v_{sound}\,\rho\Delta v \approx v_{sound}\,\rho_0\Delta v$$

(c)

$$q = \Delta P\Delta v$$

$$= (v_{sound}\,\rho_0\Delta v)\Delta v$$

$$= v_{sound}\,\rho_0(\Delta v)^2$$

$$= v_{sound}\,u$$

(d)

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho}\Delta\rho = v_{sound}^2\,\Delta\rho$$

$$\Rightarrow \Delta\rho = \frac{\Delta P}{v_{sound}^2}$$

$$j = \Delta\rho\Delta v\ (use\ the\ above\ result\ to\ substitute\ \Delta\rho)$$

$$= \frac{\Delta P}{v_{sound}^2}\Delta v\ \ (note\!:\ q = \Delta P\Delta v)$$

$$= \frac{q}{v_{sound}^2}$$

(e) (i)動量密度與能量密度的關係：

$$j = \frac{q}{v_{sound}^2}$$
$$= \frac{v_{sound}\, u}{v_{sound}^2}$$
$$= \frac{u}{v_{sound}}$$

(ii)動量與能量的關係：

$$P \equiv \int jdV$$
$$= \int \frac{u}{v_{sound}} dV$$
$$= \frac{E}{v_{sound}}$$
$$\Rightarrow E = pv_{sound}$$

(iii)可壓縮流體中聲波的動量與能量關係$E = pv_{sound}$與光波的能量關係$E = pc$同樣是正比關係，且正比的係數同樣是波速。

(iv)如果有一聲波的能量為$E = \hbar\omega$ (其中$\omega = v_{sound}k, k = \frac{2\pi}{\lambda}$)，則聲波的動量 p

$$p = \frac{E}{v_{sound}}$$
$$= \frac{\hbar\omega}{v_{sound}}$$
$$= \hbar k$$

【第四題參考解】

(a)

$$V(\infty)-V(R_1)=-\int_{R_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=-\int_{R_1}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_{R_1}^{\infty}=-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1}$$

設 $V(\infty)=0$，金屬球殼表面電位

$$V(R_1)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1}$$

由於帶電孤立導體內部電場為零，整個導體位在同一電位。因此金屬球殼中心電位

$$V(r=0)=V(R_1)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1}$$

(b) 帶電金屬球殼之電容

$$C=\frac{Q}{V(R_1)}=4\pi\epsilon_0 R_1$$

(c) 電場總能量

$$U_E=\int_{R_1}^{\infty}\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV$$

$$=\int_{R_1}^{\infty}\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1}$$

(d) 正負電金屬球殼間的電位差(取正值)

$$\Delta V=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(e)

$$\because Q=\frac{4\pi\epsilon_0\Delta V}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}\quad,\quad E(r)=\frac{4\pi\epsilon_0\Delta V}{4\pi\epsilon_0 r^2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

$$=\frac{\Delta V}{r^2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

$$\therefore E(R_1) = \frac{\Delta V}{R_1^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{(\Delta V)R_2}{R_1R_2 - R_1^2}$$

由 $\frac{dE(R_1)}{dR_1} = 0$ 且當 $R_1 = \frac{R_2}{2}$ ，$E(R_1)$為最小值，其值為

$$E_{min} = \frac{4\Delta V}{R_2}$$

【第五題參考解】

一維彈性碰撞，當兩個物體正面碰撞時，因無外力與能量耗損，由動量及動能在碰撞前後不變，可得

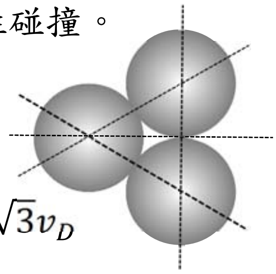
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

情況 1：$m_1 << m_2$ ($v_{2i}=0$)　情況 2：$m_1 = m_2$ ($v_{2i}=0$)　情況 3：$m_1 >> m_2$ ($v_{2i}=0$)

情況 1	情況 2	情況 3
$v_{1f} = -v_{1i}$	$v_{1f} = 0$	$v_{1f} = v_{1i}$
$v_{2f} = 0$	$v_{2f} = v_{1i}$	$v_{2f} = 2v_{1i}$

本題中 B 球與 A 球的碰撞，如情況 1，碰撞後，B 球會以速度大小 v 向右行進，接著與 C 球的碰撞，如情況 3，碰撞後，B 球以速度大小 v，C 球則以速度大小 2v 向右行進。

接著 C 球與 D, E 兩球($m_D = m_E = m_C$)發生對稱性彈性碰撞。



碰撞前，C 球速度大小$v_{Ci} = 2v$

碰撞後，C, D, E 球速度大小為v_{Cf}, v_D與v_E

由碰撞前後動量與動能關係式，可得

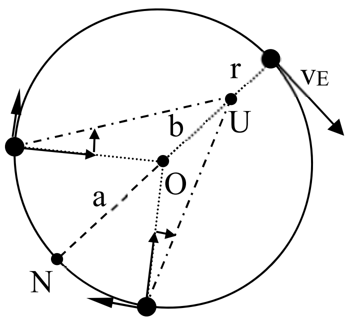
$$v_{Ci} = v_{Cf} + v_D cos30^o + v_E cos30^o \Rightarrow v_{Ci} = v_{Cf} + \sqrt{3}v_D$$

$$v_{Ci}^2 = v_{Cf}^2 + v_D^2 + v_E^2 \Rightarrow v_{Ci}^2 = v_{Cf}^2 + 2v_D^2$$

$$\Rightarrow v_{Ci}^2 = (v_{Ci} - \sqrt{3}v_D)^2 + 2v_D^2 \Rightarrow v_D = \frac{2\sqrt{3}v_{Ci}}{5}$$

$$v_E = v_D = \frac{2\sqrt{3}v_{Ci}}{5} = \frac{4\sqrt{3}v}{5}$$

(a) 接著 E 球進入光滑圓形凹槽(入射方向為圓之切線方向)，在第一個半圓時，引力做負功，直到 E 球到達 N 點，接下來的半圓，引力做正功，所以v_E至少要讓 E 球撐過 N 點，接著即可週而復始。(變速率圓周運動，引力指向圓心的分量與凹槽兩側正向力的合力提供向心力，另一分量則做正功或負功)



$$\frac{1}{2}\text{m}v_E^2 > \frac{-\text{zm}}{(\text{a}+\text{b})} - \frac{-\text{zm}}{(\text{a}-\text{b})}$$

$$v_E > \sqrt{\frac{4\text{zb}}{(\text{a}^2-\text{b}^2)}}$$

$$\Rightarrow v > \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4\text{zb}}{3(\text{a}^2-\text{b}^2)}}\ or\ \frac{5}{2}\sqrt{\frac{\text{zb}}{3(\text{a}^2-\text{b}^2)}}\ or\ 5\sqrt{\frac{\text{zb}}{12(\text{a}^2-\text{b}^2)}}$$

(b) D 球與質量相同且原先靜止的 F 球發生二維彈性碰撞，由於 $v_{Fi}=0$，碰撞前後的動量及動能關係式為

$$\overrightarrow{v_{Di}}=\overrightarrow{v_{Df}}+\overrightarrow{v_{Ff}}$$

$$v_{Di}^2=v_{Df}^2+v_{Ff}^2$$

所求的角度θ與$\overrightarrow{v_{Df}}$及$\overrightarrow{v_{Ff}}$的夾角有關，夾角的資訊可從兩向量內積得知，將動量關係式等號兩邊對自身內積，可得

$$\overrightarrow{v_{Di}}\cdot\overrightarrow{v_{Di}}=\left(\overrightarrow{v_{Df}}+\overrightarrow{v_{Ff}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{v_{Df}}+\overrightarrow{v_{Ff}}\right)$$

$$=\overrightarrow{v_{Df}}\cdot\overrightarrow{v_{Df}}+\overrightarrow{v_{Ef}}\cdot\overrightarrow{v_{Ef}}+2\overrightarrow{v_{Df}}\cdot\overrightarrow{v_{Ef}}$$

即

$$v_{Di}^2=v_{Df}^2+v_{Ff}^2+2v_{Df}v_{Ff}\cos(\theta+41^o)$$

對比動能關係式，可得

$$2v_{Df}v_{Ff}\cos(\theta+41^o)=0$$

因兩球末速皆不為零，可得

$$\theta=49^o$$

(c) D 球以速度大小v_{D2}，與質量相同且原先靜止的 G 球發生正向彈性碰撞，如同上述的情況 2，碰撞後，D 球靜止，此時 G 球速度大小為v_{D2}。接著即將開始拉長彈簧，但是，由於彈簧伸長後小球會有徑向振盪，所以若要達到題目所言作等速率圓周運動，彈簧伸長量必須為零。

意即，彈簧 k 值相對於小球的 m, v 值，會大到讓彈簧幾乎完全沒有伸長量，才能符合題目所言作等速率圓周運動的情況。

另外，若是要討論“近似”作等速率圓周運動的情況，則是指在徑向振盪幅度極小情況下(徑向速度亦極小)。設此時 G 球切線速度大小為v_{G2}，彈簧伸長量為 x，則向心力關係式為

$$kx=\frac{m_G v_{G2}^2}{l_0+x}\Longrightarrow m_G v_{G2}^2=kl_0x+kx^2$$

動位能關係式如下，其中為E_{kr}為徑向動能極小忽略不計，

$$\frac{1}{2}m_G v_{D2}^2=\frac{1}{2}m_G v_{G2}^2+\frac{1}{2}kx^2+E_{kr}$$

$$\Longrightarrow m_G v_{D2}^2=kl_0x+kx^2+kx^2$$

$$\Longrightarrow 2kx^2+kl_0x-m_G v_{D2}^2=0$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-kl_0+\sqrt{k^2l_0^2+8km_G v_{D2}^2}}{4k}\ or\ \frac{-l_0}{4}+\sqrt{\frac{l_0^2}{16}+\frac{m_G v_{D2}^2}{2k}}$$

由上式可再次確認，當彈簧 k 值遠大於小球的 m, v 值時，伸長量接近零。

(d) F 球與質量相同的 H, I 兩球發生對稱性彈性碰撞，碰撞後 H, I 兩球速度大小v_H, v_I相同。

在 H 與 P 極短的完全非彈性碰撞期間，Q 保持靜止不動，僅需考量 H、P 的動量守恆，設完全非彈性碰撞完成瞬間，H、P 的共同速度為 u，則

$$\mathrm{u} = \frac{m_H v_H}{m_H + m_P}$$

在 H、P 完成碰撞後，H、P、Q 總動能的最小值為三質點系統的質心動能，意即，此時彈簧有最大壓縮量。

由動量守恆可得此系統的質心速度

$$v_{cm} = \frac{m_H v_H}{m_H + m_P + m_Q}$$

若彈簧之最大壓縮量為x_1，則

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(m_H + m_P)u^2 - \frac{1}{2}(m_H + m_P + m_Q)v_{cm}^2$$

代入後得

$$x_1^2 = \frac{m_H^2 v_H^2}{k}\left(\frac{1}{m_H + m_P} - \frac{1}{m_H + m_P + m_Q}\right)$$

同理

$$x_2^2 = \frac{m_I^2 v_I^2}{k}\left(\frac{1}{m_I + m_J} - \frac{1}{m_I + m_J + m_S}\right)$$

由於

$v_H = v_I$，$m_H = m_I = m_F$，$m_P = m_Q = m_F$，

$m_J = 2m_F$，$m_S = 3m_F$

可得

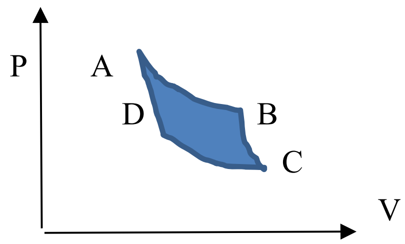
$$\frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{\frac{1}{m_I + m_J} - \frac{1}{m_I + m_J + m_S}}{\frac{1}{m_H + m_P} - \frac{1}{m_H + m_P + m_Q}} = \frac{\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2+3}}{\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+1+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 1$$

x_2是x_1的 1 倍。

【第六題參考解】

(a) P-V 圖：



(b-1) |W|單位為 $\mathrm{kg}(\frac{m}{\mathrm{sec}})^2$，因此 a 的單位為 $\mathrm{kg}(\frac{m}{\mathrm{sec}})^{-1}$, b 的單位為 $\mathrm{kg}(\frac{m}{\mathrm{sec}})$

(b-2)

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_{in}|} = \frac{T_S - T_O}{T_S} = \frac{av^3}{av^3 + bv} = \frac{1}{1 + E/v^2}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{E\frac{T_S - T_O}{T_O}}$$

(b-3) (A)