

筆試一試題及參考解

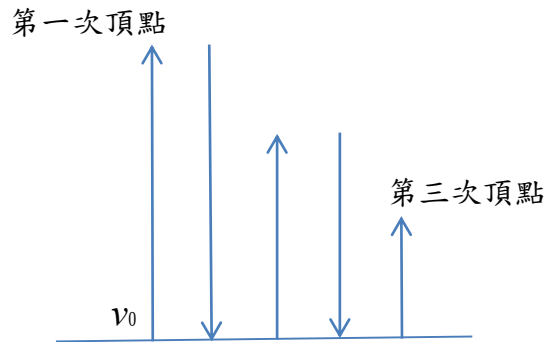
【第一題】

將一顆質量為 $m$ 的球從地面垂直上拋，已知重力加速度為 $g$ ，請考慮以下兩種情況：

- (a) 在忽略空氣阻力的情況下，如果此球拋出後的第一秒內所經過的距離是 $d$ ，第三秒內所經過的距離是 $d'$ ，則 $d/d'$ 的極大值為何？(12分) 要達到這個極大值的話，初速需為多少？(假設此球從拋出到落回地面的時間超過三秒鐘。)(3分)
- (b) 在考慮空氣阻力 $f$ 的情況下，假如 $f$ 與球的速率 $v$ 成正比，即 $f = -kmv$ ， $k$ 是大於0的常數，已知球在拋出後，其上升的距離 $y$ 是：

$$y = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right)\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-kt)^n\right],$$

其中 $v_0$ 是此球拋出的初速，此球在落回地面時，與地面做彈性碰撞(即沒有動能損失)，過程簡圖如下。



假設 $k$ 值很小，以下問題最後的答案只須考慮到 $k$ 一次方的結果。

- 請問此球從第一次頂點的高度落回地面需要多少時間？(5分) 如果此球第一次頂點的高度比沒有空氣阻力時最高點的高度減少 $d$ ，第三次頂點的高度比沒有空氣阻力時最高點的高度減少 $d'$ ，則 $d/d'$ 的值為何？(10分)

【第一題參考解】

- (a) 題目求 $d/d'$ 最大，即 $d'$ 最小，在相同時間內走的距離最短，那就是速度最小，球在上拋時速度最小是發生在到達最高點前後，因此球在第三秒內越過最高點。假設球初速為 $v_0$ ，在第 $t = 1$ 秒內所走距離是

$$d = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

在第三秒內所走距離的算法，可以假設球從最高點落下 $t'$ 秒後 ( $t' < 1$ ，所走距離為 $\frac{1}{2} g t'^2$ )，時間到達三秒，則第三秒內所走距離為

$$d' = \frac{1}{2} g (t - t')^2 + \frac{1}{2} g t'^2$$

另外 $v_0 = g(3t - t')$ ，所以

$$\frac{d}{d'} = \frac{g(3t - t')t - \frac{1}{2} g t^2}{\frac{1}{2} g (t - t')^2 + \frac{1}{2} g t'^2} = \frac{\frac{5}{2} t^2 - t t'}{\frac{1}{2} t^2 - t t' + t'^2}$$

調整 $t'$ 使得 $d/d'$ 有極大值，即上式對 $t'$ 微分等於零，也就是

$$-t \left( \frac{1}{2} t^2 - t t' + t'^2 \right) - \left( \frac{5}{2} t^2 - t t' \right) (2t' - t) = 0$$

因為 $t = 1$ ，所以上式化簡為

$$2 - 5t' + t'^2 = 0$$

所以 $t' = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ ，最後  $d/d'$ 的極大值等於  $\boxed{4 + \sqrt{17}}$  (不是 8，所以不是在兩秒

半的時候到達最高點)，初速為  $\boxed{\frac{1 + \sqrt{17}}{2} g}$ 。

(b)

(I) 因為 $k$ 很小，我們將題目所給的上升距離展開到 $n = 3$ 後，其餘忽略：

$$\begin{aligned} y \uparrow &\cong -\frac{g}{k} t + \frac{1}{k} \left( \frac{g}{k} + v_0 \right) \left[ 1 - 1 + kt - \frac{1}{2} (kt)^2 + \frac{1}{6} (kt)^3 \right] \\ &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} k v_0 t^2 + \frac{1}{6} k g t^3 \quad (1) \end{aligned}$$

先求第一次落回地面所需時間 $t_1$ ，

$$0 = t \left[ v_0 - \frac{1}{2} (g + k v_0) t + \frac{1}{6} k g t^2 \right]$$

$$t_1 = \frac{\frac{1}{2}(g + k v_0) - \frac{1}{2} g \sqrt{1 - \frac{2}{3} k v_0 / g + (k v_0 / g)^2}}{\frac{1}{3} k g} \cong \frac{2v_0}{g} - k \frac{2v_0^2}{3g^2} \text{。 (正不合)}$$

再求到達第一次頂點所需時間：上升速度是

$$\dot{y} \uparrow = v_0 - gt - kv_0t + \frac{1}{2}kgt^2$$

上升到最高點代表  $\dot{y} \uparrow = 0$ ，所需時間是解以下方程式

$$\frac{1}{2}kgt^2 - (g + kv_0)t + v_0 = 0$$

$$\text{所以 } t_{1/2} = \frac{(g+kv_0) - g\sqrt{1+(kv_0/g)^2}}{kg} \quad (\text{正不合})$$

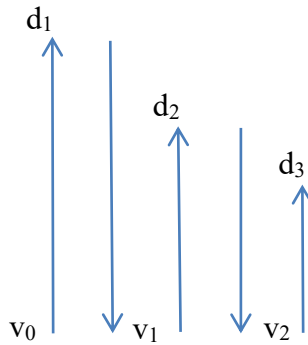
$$\cong \frac{v_0}{g} - k \frac{v_0^2}{2g^2}$$

相減即是球從第一次頂點的高度落回地面所需時間

$$t_1 - t_{1/2} \cong \frac{v_0}{g} - k \frac{v_0^2}{6g^2} \circ (\text{比上去時間長})$$

(II) 將(1)作  $v_0 \rightarrow 0$ ， $g \rightarrow -g$ 的代換可得球落下距離的表示式

$$y \downarrow = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{6}kgt^3 \quad (2)$$



現在將  $t_1 - t_{1/2}$  代入(2)可得第一次頂點的高度：

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2}g \left( \frac{v_0}{g} - k \frac{v_0^2}{6g^2} \right)^2 - \frac{1}{6}kg \left( \frac{v_0}{g} - k \frac{v_0^2}{6g^2} \right)^3 \\ &\cong \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^3}{3g^2}k = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 - k \frac{2v_0}{3g} \right) \end{aligned}$$

無空氣阻力的高度是  $\frac{v_0^2}{2g}$ ，所以  $d = \frac{v_0^2}{2g}k$ 。接著算第一次落回地面的速度，

將(2)微分得球落下速度  $\dot{y} \downarrow = gt - \frac{1}{2}kgt^2$ ，

將  $t_1 - t_{1/2}$  代入得第一次落回地面的速度

$$\begin{aligned} v_1 &= g \left( \frac{v_0}{g} - k \frac{v_0^2}{6g^2} \right) - \frac{1}{2}kg \left( \frac{v_0}{g} - k \frac{v_0^2}{6g^2} \right)^2 \\ &\cong v_0 - \frac{2}{3}k \frac{v_0^2}{g} = v_0 \left( 1 - k \frac{2v_0}{3g} \right) \end{aligned}$$

因為與地面做彈性碰撞，所以第一次彈起  $v_1$  可看成另一個初速，第二次頂點的高度

$$\begin{aligned}
d_2 &= \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - k \frac{2v_1}{3g}\right) \\
&= \frac{1}{2g} \left[ v_0 \left(1 - k \frac{2v_0}{3g}\right) \right]^2 \left(1 - k \frac{2}{3g} v_0 \left(1 - k \frac{2v_0}{3g}\right)\right) \\
&\cong \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - k \frac{6}{3g} v_0\right)
\end{aligned}$$

因此第二次落回地面的速度

$$\begin{aligned}
v_2 &= v_1 \left(1 - k \frac{2v_1}{3g}\right) \\
&= v_0 \left(1 - k \frac{2v_0}{3g}\right) \left(1 - k \frac{2}{3g} v_0 \left(1 - k \frac{2v_0}{3g}\right)\right) \\
&\cong v_0 \left(1 - k \frac{4v_0}{3g}\right)
\end{aligned}$$

第二次彈起 $v_2$ 可再看成另一個初速，而第三次頂點的高度

$$\begin{aligned}
d_3 &= \frac{v_2^2}{2g} \left(1 - k \frac{2v_2}{3g}\right) \\
&\cong \frac{v_0^2}{2g} \left[ \left(1 - k \frac{4v_0}{3g}\right) \right]^2 \left(1 - k \frac{2}{3g} v_0 \left(1 - k \frac{4v_0}{3g}\right)\right) \\
&\cong \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - k \frac{10}{3g} v_0\right)
\end{aligned}$$

無空氣阻力的高度是 $\frac{v_0^2}{2g}$ ，所以 $d' = \frac{v_0^2}{2g} \left(k \frac{10}{3g} v_0\right) = \frac{5v_0^3}{3g^2} k$ ，所以

$$\boxed{d/d' = \frac{\left(\frac{v_0^3}{3g^2} k\right)}{\left(\frac{5v_0^3}{3g^2} k\right)} = 1/5}$$

## 【第二題】

王先生在野外賞鳥時，發現某種不知名的黃鳥，於是他利用數位相機拍了一張相片，如圖 1 所示。拍攝此張相片時的相機設定資訊如下表：

項目	資訊	說明
f-number	2.8	f-number = 焦距/光圈直徑
焦距	85 公釐	
曝光時間	1/2000 秒	

請根據此張相片回答下列問題：

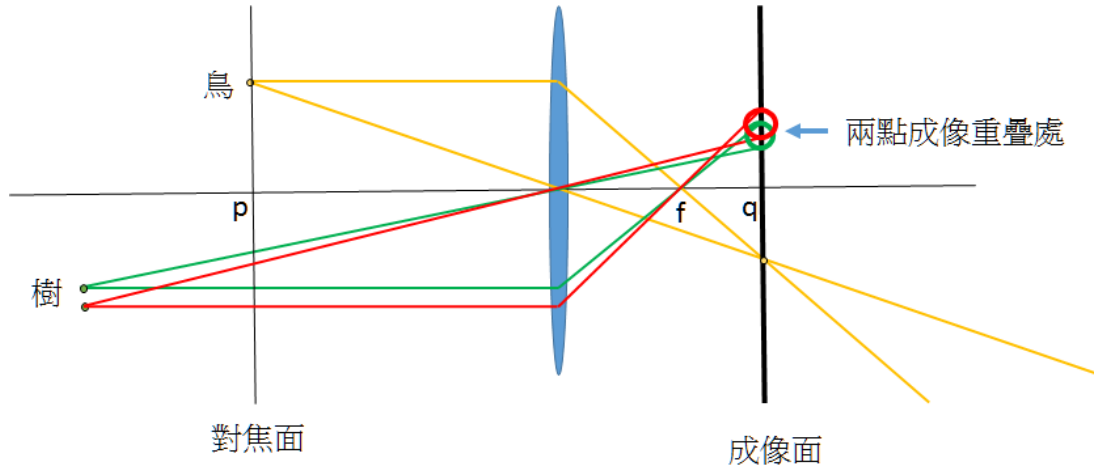
- (a) 在此張相片中，我們可以清晰的看出黃鳥的飛行姿態，然而背景的樹林影像卻很模糊，請說明其原因。(5 分)
- (b) 相片中有許多大小相似但亮度不一的圓形光斑，請說明其成因。(5 分)
- (c) 在鳥類鑑定實務上，鳥體各部位的長度量度是很重要的鑑定參數。由於黃鳥在空中飛行，因此王先生無法直接測量其體長。請問你要如何協助王先生估計黃鳥之實際體長？假設鳥類體長為頭部頂端到尾羽末端的距離。(20 分)



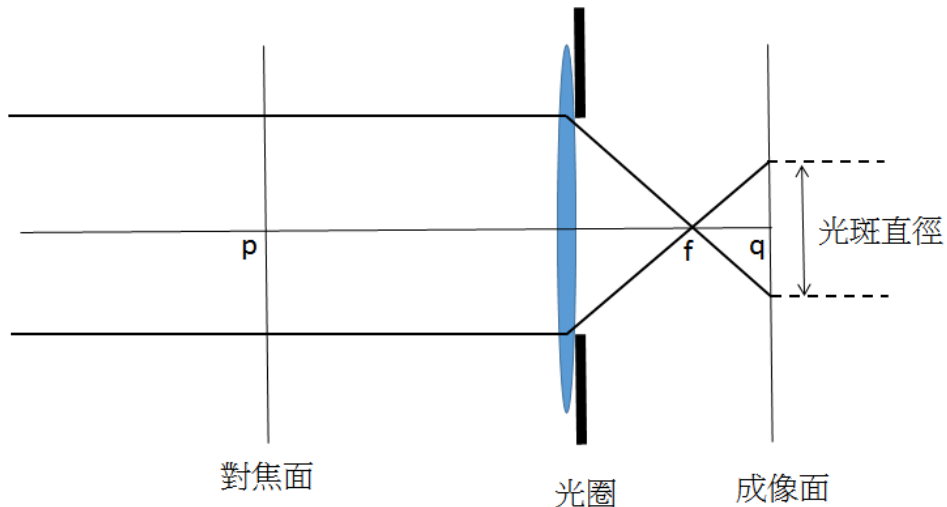
圖 1

### 【第二題參考解】

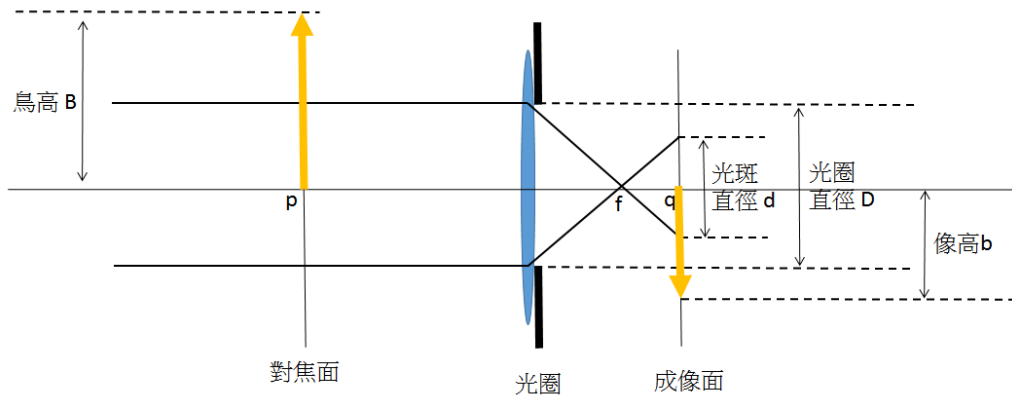
- (a) 假設黃鳥距離相機的鏡頭  $p$  (物距)，調整相機鏡頭焦距為  $f$ ，使黃鳥可清晰成像於相機感光元件面  $q$  (像距)。然而，黃鳥後方樹林鄰近兩點之清晰成像面在  $f, q$  兩點之間，若在  $q$  處成像則會形成兩重疊光斑，如下圖所示。



- (b) 成像面的圓形光斑源自於黃鳥後方之點光源，其在成像面形成一圓形對稱光斑，假設遙遠處的光點之入射光近似為平行光，而光斑最大直徑受限於相機光圈，因此光斑大小相似，如下圖所示。



- (c) 假設薄透鏡焦距為  $f$ ，光圈直徑為  $D$ ，光斑直徑為  $d$ ，對焦面  $p$  的物高為  $B$ ，以及成像面  $q$  的像高為  $b$ 。



1. 假設光圈直徑為  $D$ ，光斑直徑為  $d$ ，由相似三角形可知

$$\frac{D}{d} = \frac{f}{q - f}$$

2. 假設對焦面  $p$  的物高為  $B=D$ ，因此成像面  $q$  的像高為  $b=d$ ，可得

$$\frac{B}{b} = \frac{D}{d} \text{ 或 } B = \frac{b}{d} \times D$$

其中  $\frac{b}{d}$  為相片中的鳥體長與光斑直徑之比值。

3. 由拍攝相片的相機  $f$ -number 以及鏡頭焦距可知光圈直徑

$$D = \frac{85}{2.8} = 30.36(\text{mm})$$

由相片可求得  $b/d$  之比值約為 9。

4. 將  $D=30.36\text{mm}$  以及  $b/d=9$  代入可得

$$B=9 \times 30.36=273.24(\text{mm})。$$

5. 因此，我們可估計黃鳥體長約為 27 公分。

### 【第三題】

#### I. 說明部分：

##### (a) 經過多層介質的入射波、反射波與透射波

波的傳播，在經過多層介質時，會歷經多次的反射與透射，在這種狀況時，可以使用矩陣運算來協助我們求得反射波與透射波的振幅與相位。

如圖 1，我們可以將一道波經歷一個介面，或經過一段距離的傳播之後，相關聯的 4 道波之間的關係用矩陣的形態表示出來：

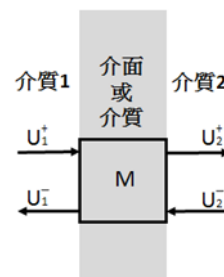


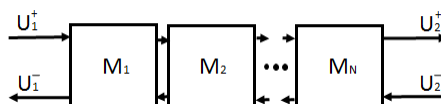
圖 1

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$

其中  $U_1^+$  代表介質 1 中，往右方傳播的波之總和； $U_1^-$  代表介質 1 中，往左方傳播的波之總和； $U_2^+$  代表介質 2 中，往右方傳播的波之總和； $U_2^-$  代表介質 2 中，往左方傳播的波之總和。

此後歷經多個介面之間的反射與透射，進出此範圍的 4 道波之間的關係便可表示為：

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = M_N \cdot M_{N-1} \dots M_2 \cdot M_1 \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$



如此可以藉由這種方式，求出歷經多層介質後的反射波與透射波的振幅與相位。

##### (b) 平面波的複數表示法

一道振幅為  $A$ ，在介質(折射率  $n$ )中之波長為  $\frac{\lambda_0}{n}$ ，角頻率為  $\omega$ ，並且朝  $+x$  方向移動，波前為一平面的餘弦光波可表示為：

$$A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} \cdot x - \omega \cdot t\right) = \text{Re}\left\{A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} \cdot x - \omega \cdot t\right)}\right\};$$

其中  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ ； $\text{Re}\{z\}$  代表複數  $z$  的實部。

因此一道波前為平面的餘弦光波之複數表示，可用  $A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} \cdot x - \omega \cdot t\right)}$  來代表。此道波在實空間的餘弦波形只須將此複數表示取實部即可得到。

##### (c) 複數反射係數與複數透射係數



若在介面上產生的反射波，其振幅在反射後變為原來的  $a$  倍，且反射時相位角增加了  $\theta_r$ ，則反射波可表示為：

$$a \cdot A \cdot \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi n}{\lambda_0} \cdot x - \omega \cdot t\right) = \text{Re}\{a \cdot e^{i\theta_r} \cdot A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} x - \omega t\right)}\}.$$

若定義：**複數反射係數** =  $\frac{\text{反射波的複數表示}}{\text{入射波的複數表示}}$ ，便可用一複數反射係數  $r =$

$$\frac{a \cdot e^{i\theta_r} \cdot A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} x - \omega t\right)}}{A \cdot e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} x - \omega t\right)}} = a \cdot e^{i\theta_r}$$

來表示介面的反射特性。同理，若定義：**複數透**

**射係數** =  $\frac{\text{透射波的複數表示}}{\text{入射波的複數表示}}$ ，則可用一複數透射係數  $t = |t|e^{i\theta_t}$ ，來表示介面的透射特性。

## II. 問題部分：

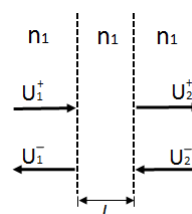
假設以下問題中，各介質的折射率均為正實數（光波在介質中傳播時能量不會損耗）。

### (a) 均勻介質中傳播一段距離

若在均勻介質（折射率  $n_1$ ）中傳播一段距離  $L$ ，此時進出此段範圍的 4

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$

試求出  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = ?$  (5 分)

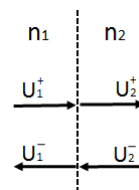


### (b) 介面反射與透射

已知光波進出一個兩邊折射率不同的介面時，相關聯的 4

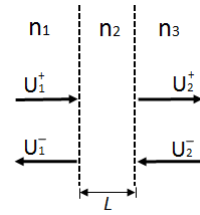
$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_1^- \end{bmatrix} = \frac{1}{n_1 + n_2} \cdot \begin{bmatrix} 2n_1 & n_2 - n_1 \\ n_1 - n_2 & 2n_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_2^- \end{bmatrix}$$

請將此關係轉換為  $\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$ ，並求出  $\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = ?$  (5 分)



(c) 多層結構

若在介質 1 (折射率 $n_1$ ) 與介質 3 (折射率 $n_3$ ) 之間夾一層厚度為  $L$  的介質 2 (折射率 $n_2$ )，此時進出此段範圍的 4 個波之關係可表示為



$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$

試求出  $\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = ?$  (10 分)

(d) 抗反射多層結構

接上一小題，若入射波 $U_1^+$ 由左方入射，進入(c)小題中的多層結構之後，沒有反射波。試利用(c)小題的結果，求出：

(d-1)  $L$  必須是真空中波長 $\lambda_0$ 的多少倍？

(d-2) 接(d-1)小題，此時的折射率 $n_1$ ,  $n_2$ 與 $n_3$ 之間的關係為何？

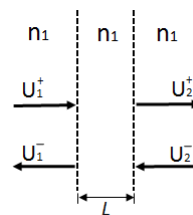
(10 分)

### 【第三題參考解】

(a) <均勻介質中傳播一段距離>

均勻介質中傳播一段距離  $L$ ，進出此段範圍的 4 道波之間的關係可表示為

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(\frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \cdot L)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \cdot L)} \end{bmatrix}。$$



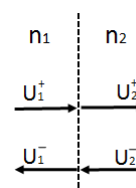
(b) <介面反射與透射>

光波進一個兩邊折射率不同的介面時，相關聯的 4 道波滿足

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \frac{1}{n_1 + n_2} \cdot \begin{bmatrix} 2n_1 & n_2 - n_1 \\ n_1 - n_2 & 2n_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$

透過將聯立方程式重新排列整理，可求得

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}，而 \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n_1 & n_2 + n_1 \end{bmatrix}。$$



(c) <多層結構>

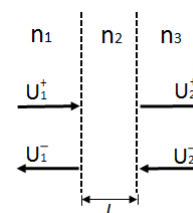
若在介質 1(折射率 $n_1$ )與介質 3(折射率 $n_3$ )之間夾一層厚度為  $L$  的介質 2(折射率 $n_2$ )，此時進出此段範圍的 4 道波之間的關係可表示為

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix} = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2n_3} \begin{bmatrix} n_3 + n_2 & n_3 - n_2 \\ n_3 - n_2 & n_3 + n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} \end{bmatrix} \cdot \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n_1 & n_2 + n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$

$$\text{可求出 } \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4n_2 n_3}$$

$$\begin{bmatrix} (n_3 + n_2)(n_2 + n_1)e^{i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} + (n_3 - n_2)(n_2 - n_1)e^{-i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} & (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} + (n_3 - n_2)(n_2 + n_1)e^{-i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} \\ (n_3 - n_2)(n_2 + n_1)e^{i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} + (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{-i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} & (n_3 - n_2)(n_2 - n_1)e^{i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} + (n_3 + n_2)(n_2 + n_1)e^{-i(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L)} \end{bmatrix}$$



(d) <抗反射多層結構>

入射波  $U_1^+$  由左方入射，進入上一小題中的結構，可將相關的四道波之關係表示為：

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$

可將此矩陣關係改寫為：

$$\begin{bmatrix} U_2^+ \\ U_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \begin{bmatrix} t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} & r_{21} \\ -r_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^+ \\ U_1^- \end{bmatrix}$$

若沒有反射波，則  $r_{12} = 0$ ，也就是  $C_3 = 0$ 。

$$(n_3 - n_2)(n_2 + n_1)e^{i\left(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0}L\right)} + (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{-i\left(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0}L\right)} = 0$$

等號兩端同除以  $e^{i\left(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0}L\right)}$ ，得到

$$(n_3 - n_2)(n_2 + n_1) + (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{-i\left(\frac{4\pi n_2}{\lambda_0}L\right)} = 0$$

又本式中  $e^{-i\left(\frac{4\pi n_2}{\lambda_0}L\right)}$  的虛部必須為 0，得

$$\frac{4\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L = (2m - 1) \cdot \pi \text{ 或 } 2m \cdot \pi ; \text{ 其中 } m \text{ 為正整數。}$$

(d-1) 當  $\frac{4\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L = (2m - 1) \cdot \pi$ ， $L = \frac{2m-1}{4} \cdot \frac{\lambda_0}{n_2}$ ，此時  $n_2^2 = n_1 n_3$ ；

(d-2) 當  $\frac{4\pi n_2}{\lambda_0} \cdot L = 2m \cdot \pi$ ， $L = \frac{m}{2} \cdot \frac{\lambda_0}{n_2}$ ，此時  $n_2(n_3 - n_1) = 0$ ，可得到

$$n_3 = n_1 \text{。}$$

### 【第四題】

在實驗課中，老師交給某位同學三個黑盒子 A、B、C，並要求該同學量測黑盒子 A、B、C 的特性曲線。現在把該同學得到的數據表列於下：

	黑盒子A	黑盒子B	黑盒子C
電壓 (V)	電流 (mA)	電流 (mA)	電流 (mA)
0.5	0.5	1.2	0.3
1.0	1.0	2.0	0.5
1.5	1.5	2.6	0.8
2.0	2.0	3.0	1.0
2.5	2.4	3.3	1.2
3.0	3.0	3.5	1.5
3.5	3.5	3.7	1.7
4.0	4.1	3.8	2.0
4.5	4.5	3.8	2.2
5.0	4.9	3.9	2.5

- (a) 請分析數據，說明哪些黑盒子等效於歐姆電阻元件，並估計其電阻值。(10 分)
- (b) 利用黑盒子 A、B、C 組成圖 1 之直流電路，若電池的電壓為 4.2 V，請問通過 P 點的電流為多少？(忽略電池的內電阻)(10 分)

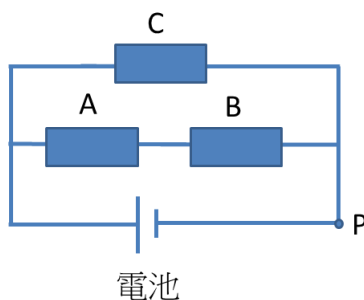


圖 1

- (c) 考慮圖 2 之直流電路，若電池一的電壓為 3.0 V，通過黑盒子 C 的電流為 2.0 mA，請問通過黑盒子 A、B 的電流分別為多少？電池二的電壓為多少？(忽略電池的內電阻)(10 分)

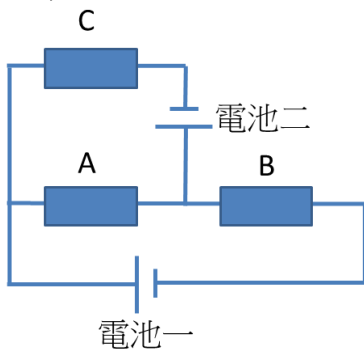
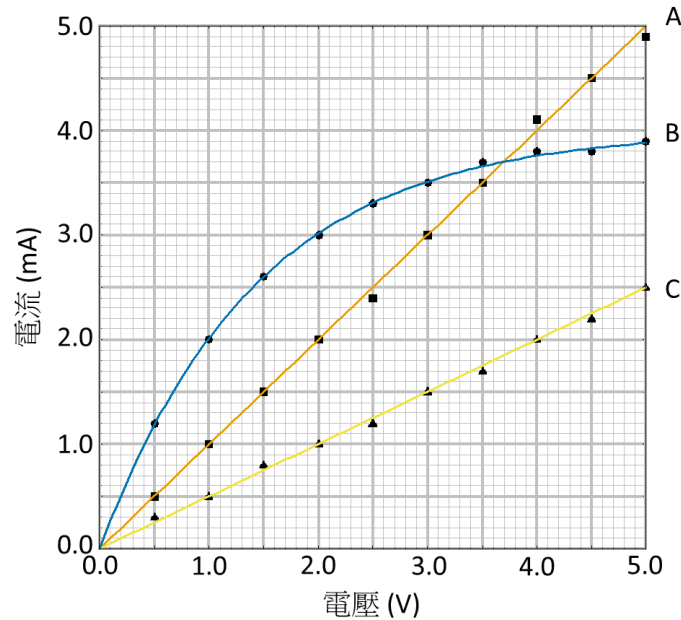


圖 2

### 【第四題參考解】

本題運用的物理概念：歐姆定律、克希荷夫電壓定律以及電流定律。

(a) A、B、C 的電壓與電流的特性曲線圖如下所示：

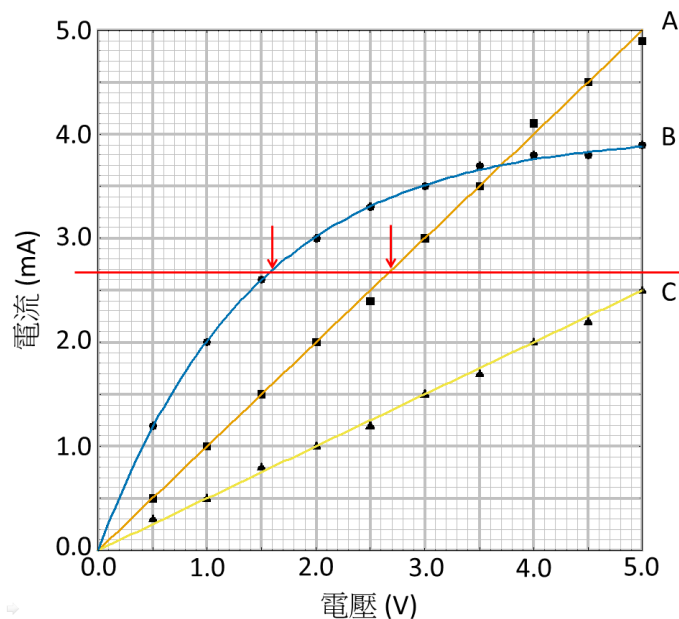


黑盒子 A 相當於電阻值為  $1\text{k}\Omega$  的歐姆電阻元件，  
黑盒子 C 相當於電阻值  $2\text{k}\Omega$  的歐姆電阻元件。

(b)  $V_C = 4.2\text{ V}$ ，參考電壓電流特性曲線圖， $I_C = 2.1\text{ mA}$ 。

又因為 A、B 與 C 並聯，所以  $V_A + V_B = 4.2$ 。

因為通過 A、B 的電流相同，所以在特性曲線圖上畫出等電流的水平線，如下圖所示，估計對應的  $V_A$ 、 $V_B$ 。



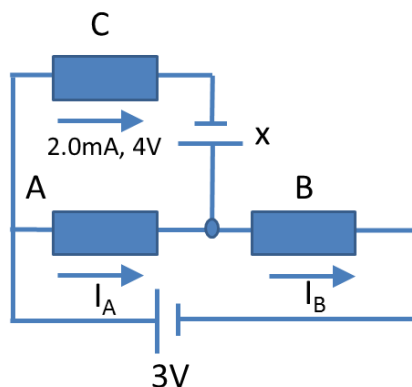
當通過 A、B 的電流約為 2.7 mA 時，

$$V_A = 2.7 \text{ V}、V_B = 1.6 \text{ V}，V_A + V_B \text{ 近似於 } 4.2\text{V}。$$

因此，通過 P 點的電流約為

$$2.1 \text{ mA} + 2.7 \text{ mA} = 4.8 \text{ mA}$$

- (c) 參考下圖，已知通過黑盒子 C 的電流為 2.0 mA，其對應的電位差為 4V。假設通過黑盒子 A 的電流為  $I_A$ ，通過黑盒子 B 的電流為  $I_B$ ，未知電池的電壓為  $x$ 。



根據克希荷夫電壓定律，選取上半部封閉迴路，可以得到

$$4(V) - I_A(mA) \cdot 1(k\Omega) = x(V) \quad (1)$$

選取下半部封閉迴路，可以得到

$$I_A(mA) \cdot 1(k\Omega) + V_B(I_B) = 3(V) \quad (2)$$

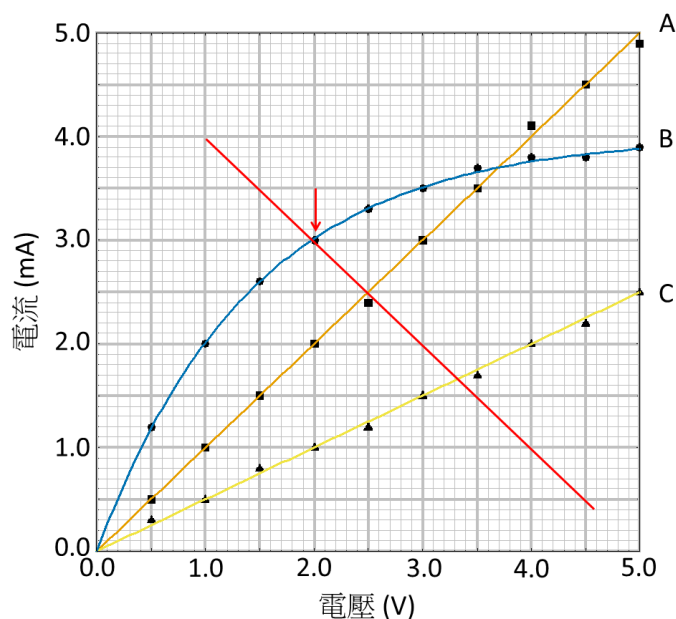
再根據克希荷夫電流定律， $I_A + I_C = I_B$ ，也就是

$$I_A = I_B - 2 \quad (3)$$

聯立方程式(3)與(2)，得到  $I_B$  與  $V_B$  滿足的方程式為

$$I_B = -V_B + 5 \quad (4)$$

把方程式畫在電壓與電流的特性曲線圖，如下圖所示。



可以看到方程式(4)與黑盒子 B 的趨勢線交於 (2.0 V, 3.0 mA) 。因此，通過黑盒子 B 的電流  $I_B = 3.0 \text{ mA}$ ，兩端電位差為 2.0 V。

將  $I_B = 3.0 \text{ mA}$  代入方程式(3)，可得通過黑盒子 A 的電流

$$I_A = 1.0 \text{ mA}$$

最後，將  $I_A = 1.0 \text{ mA}$  代入方程式(1)，可得未知電池的電壓

$$x = 3.0 \text{ V}$$



【第五題】

- (a) 使用一電磁爐加熱大小形狀相同的鐵鍋及鋁鍋，發現使用相同火力進行加熱時鐵鍋溫度上升較快。試由鐵與鋁的材料特性 (如表 1) 及電磁爐加熱的原理 (法拉第的電磁感應定律) 估算鐵鍋和鋁鍋的熱功率的比值。(6 分)

	電阻率 (20°C 時) ( $\Omega \cdot m$ )	磁化率 $\chi$ (27°C 時)	熱導率 $k_t$ (W/(m·K))	比熱 (J/(kg·K))
鐵	$9.71 \times 10^{-8}$	約 600 (鑄鐵)	80.4	447
鋁	$2.65 \times 10^{-8}$	$2.1 \times 10^{-5}$	237	900

表 1

[註：材料中的磁場強度 $B_m$ 和外加磁場 $B_{ext}$ 的關係為 $B_m \approx (1+\chi)B_{ext}$ 。]

- (b) 表一中未給出鐵和鋁的密度，將上述鐵和鋁鍋完全浸於水中，發現其重量各減少 12.7% 及 37.0%。已知水的密度為  $1 \text{ g/cm}^3$ ，問鐵和鋁的密度各為多少？(4 分)
- (c) 物體的熱傳導可由  $\frac{Q}{\Delta t} \approx -k_t A \frac{\Delta T}{\Delta x}$  來描述，其中 Q 代表於  $\Delta t$  時間中流入或流出的熱量，A 為截面積， $\Delta T$  為間距  $\Delta x$  兩端的溫差。今考慮一鐵鍋，其鐵製鍋柄為 20cm 長。若該鐵鍋被加熱且鍋柄靠近鐵鍋的一端固定在  $200^\circ\text{C}$ ，試估算鍋柄遠離鍋子的一端的溫度由室溫 (約  $25^\circ\text{C}$ ) 上升至  $75^\circ\text{C}$  所花的時間約幾秒？(6 分)
- (d) 置入一薄片長方形冰磚 (形狀如圖 1 所示)，冰磚長  $L = \overline{AD} = \overline{BC}$  和寬  $w = \overline{AB} = \overline{CD}$ ，對角線  $BD$  平行於鍋底，厚度 (垂直於紙面方向) 遠小於長及寬，於該  $200^\circ\text{C}$  的鐵鍋中，初放入時冰磚不動，若鐵鍋鍋內的平滑度是均勻的，初始時的靜摩擦係數為  $\mu$ ，問此時 A, B, D 點的鍋子給冰磚的正向力各為何？(9 分)
- (e) 承(d)小題，幾秒後冰磚開始融化，設鐵鍋各處均固定為  $200^\circ\text{C}$ ，問冰磚的 A, B, C, D 四端點融化的次序？(2 分) 理由為何？(2 分)
- (f) 承(e)小題，冰磚開始融化得出  $0^\circ\text{C}$  的水及冰塊，以手觸摸水及以手觸摸冰塊何者感覺較冷？(1 分) 為什麼？(1 分)

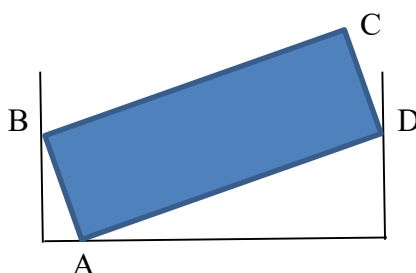


圖 1

### 【第五題參考解】

- (a) 熱功率  $P$  由  $P = V^2/R$  求出，電阻  $R = \rho L/A$ ，長度  $L$  及截面積  $A$  在相同的鍋子形狀下為相同，電壓  $V$  由法拉第的電磁感應定律得知和磁通量  $\Phi$  隨時間變化成正比 ( $V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ )，又對一材料中的均勻磁場  $B(m)$  穿過截面積  $A'$  的磁通量為  $\Phi = B(m)A'$ 。因外加磁場對二鍋的時變率皆同，且有相同的形狀，故兩者的熱功率比為：

$$P(\text{鐵鍋})/P(\text{鋁鍋}) \approx \frac{(1+\chi(\text{鐵}))^2/\rho(\text{鐵})}{(1+\chi(\text{鋁}))^2/\rho(\text{鋁})} \approx 9.86 \times 10^4$$

- (b) 設物體密度為  $d$ ，物體浸入水中受浮力為  $1 \times V \times g$ ，故重量減少百分比為  $\frac{1Vg}{dVg} = \frac{1}{d}$ ；由此得  $d(\text{鐵})=1/0.127=7.87 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ ； $d(\text{鋁})=1/0.37=2.70 \text{ (g/cm}^3\text{)}$

- (c) [估算法]：由  $Q = \text{比熱} C_v \times \text{鍋柄質量} (=d(\text{鐵}) \times A(\text{鍋柄}) \times L(\text{鍋柄})) \times \text{溫度變化量} (=75-25)$ ；於此溫度變化過程柄的末端溫度一直在變，故選擇中間溫度 ( $50^\circ\text{C}$ ) 來估算熱傳導的溫差。由  $\frac{Q}{\Delta t} \approx -k_t A \frac{\Delta T}{\Delta x}$  可得：

$$\Delta t \approx \frac{Q}{k_t A \frac{\Delta T}{\Delta x}} \approx \frac{C_v d A L (75-25)}{k_t A \frac{(200-50)}{L}} = \frac{447 \times 7.87 \times 10^3 \times (0.2)^2 \times 50}{80.4 \times 150} \approx 583 \text{ (sec)}$$

[較精確的算法]：和上述估算類似，但計入末端溫度隨時間的變化：

$$\frac{C_v d A L dT}{dt} \approx k_t A \frac{(200-T)}{L}$$

$$\rightarrow t \approx \int_{25}^{75} \frac{C_v d A L dT}{k_t A \frac{(200-T)}{L}} = \frac{447 \times 7.87 \times 10^3 \times (0.2)^2}{80.4} \text{Ln}\left[\frac{175}{125}\right] \approx 589 \text{ (sec)}$$

- (d) 設 A,B,D 點的正向力為  $N_A, N_B, N_D$ ，冰磚總值量為  $M$ ，各向均勻。故設有相同的磨擦係數  $\mu$ ，整體靜力平衡的條件為：

$$Mg + f_B - f_D - N_A = 0,$$

$$f_A + N_B = N_D,$$

$$R \times f_D + R \times f_B + R \times f_A \times \text{Sin}\theta = R \times N_A \times \text{Cos}\theta.$$

第三式是由以冰磚質心為轉動中心的合力矩為零得出， $R = \overline{BD}/2$ ， $\theta$  為 A 點至冰磚質心的線段與鍋底的夾角。帶入  $f_i = \mu N_i$  ( $i=A, B, \text{ or } D$ ) 得出。由三角形作圖的幾何關係得到

$$\text{Sin}\theta = \frac{2Lw}{L^2 + w^2}, \text{Cos}\theta = \frac{L^2 - w^2}{L^2 + w^2}$$

解完代數後得：

$$N_A = \frac{Mg}{1 + \mu^2},$$

$$N_B = Mg \left[ \frac{-1}{2\mu} + \frac{L(L-w)}{(L^2+w^2)(1+\mu^2)} \right],$$

$$N_D = Mg \left[ \frac{1}{2\mu} - \frac{w(L+w)}{(L^2+w^2)(1+\mu^2)} \right]$$

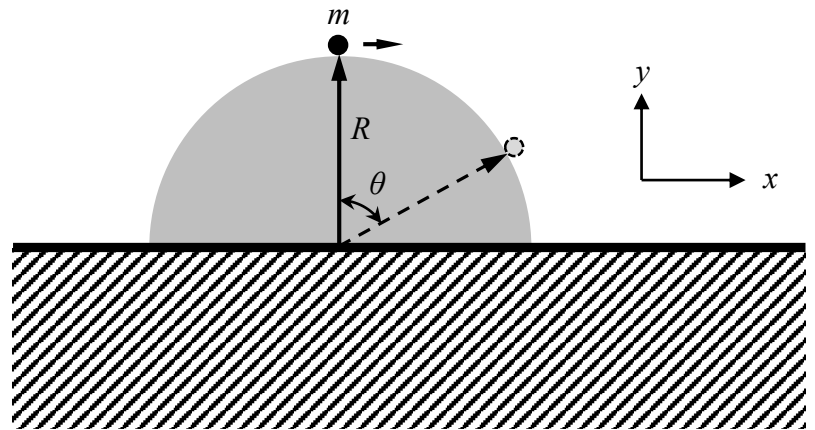
(e) D->B->A->C ; D 最先融解因為該點正向力及摩擦力均為最大，其次為 B 點，最小的為 A 點，正向力越大融點越低，摩擦生熱也會讓該區易融。C 點沒有直接和鐵鍋接觸，因此最晚融解。

(f) 冰較冷，因為冰的熱傳導係數大於水。

筆試二試題及參考解

【第一題】

如右圖所示，考慮一質量  $m$ 、半徑  $r$ 、轉動慣量為  $(2/5)mr^2$  的小球在一位於水平地面上，質量  $M$ ，半徑  $R$  的半球表面上運動 ( $r \ll R$ )。本題用到的重力加速度以  $g$  表示。



- I. 若半球固定於地面上，且小球與半球表面的靜摩擦係數為  $\mu$ 。初始時，小球位於半球的頂點，並讓小球以幾乎為零的初速，開始向右運動。
- 若小球在半球面上作純滾動，當小球與  $y$  軸的夾角為  $\theta$  時，求小球的質心運動速率  $v$ 。以  $\theta$  的函數及上述的物理參數表示。(5 分)
  - 承(a)小題，求半球施加在小球上的正向力及摩擦力的大小  $F_N$ 、 $F_T$ 。以  $\theta$  的函數及上述的物理參數表示。(6 分)
  - 承(a)、(b)小題，設  $\mu = 1/3$ ，小球在  $\theta = \theta_1$  時，會開始相對於半球表面滑動，求  $\cos\theta_1$ 。(5 分)
- II. 若小球表面、半球表面及地面皆為光滑。初始時，小球位於半球的頂點，並讓小球以幾乎為零的初速，開始向右運動。
- 當小球與  $y$  軸的夾角為  $\theta$  時，求半球及小球的質心運動速度  $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 。以  $\theta$  的函數及上述的物理參數表示。(8 分)
  - 承(d)小題，求半球施加在小球上的正向力大小  $F_N$ 。以  $\theta$  的函數及上述的物理參數表示。(6 分)

【第一題參考解】

(a) 質量為  $m$  的小球之質心位置為

$$\vec{r}(t) = R\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\}.$$

小球的速度及加速度分別為

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\{\cos\theta(t)\hat{x} - \sin\theta(t)\hat{y}\}.$$

$$\vec{a}(t) = R\ddot{\theta}\{\cos\theta(t)\hat{x} - \sin\theta(t)\hat{y}\} - R\dot{\theta}^2\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\}.$$

由力學能守恆知

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgR\cos\theta(t) = mgR.$$

$$v = R\dot{\theta}, r\omega = R\dot{\theta}, I = (2/5)mr^2.$$

化簡可得

$$(7/10)mR^2\dot{\theta}^2 = mgR(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{10g(1-\cos\theta)}{7R}} = \sqrt{\frac{20g}{7R}}\sin(\theta/2). \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

$$v = \sqrt{\frac{20gR}{7}}\sin(\theta/2).$$

(b)  $\ddot{\theta} = \sqrt{\frac{5g}{7R}}\dot{\theta}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5g}{7R}\sin\theta.$

由牛頓第二運動定律：

$$F_N\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\} + F_T\{-\cos\theta(t)\hat{x} + \sin\theta(t)\hat{y}\} - mg\hat{y} = m\vec{a}(t).$$

$$m\vec{a}(t) = mR\ddot{\theta}\{\cos\theta(t)\hat{x} - \sin\theta(t)\hat{y}\} - mR\dot{\theta}^2\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\},$$

$$m\vec{a}(t) = (5/7)mgsin\theta\{\cos\theta(t)\hat{x} - \sin\theta(t)\hat{y}\} - (10/7)mg(1 - \cos\theta)\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\}.$$

半球作用在小球的正向力為

$$F_N = (mg/7)(17\cos\theta - 10).$$

半球作用在小球的最大靜摩擦力為

$$F_T = (2mg/7)\sin\theta.$$

(c) 沒有滑動的條件為

$$\mu F_N \geq F_T \Rightarrow \mu(17\cos\theta - 10) \geq 2\sin\theta.$$

$\mu = 1/3$ ，恰好滑動時

$$(17\cos\theta_1 - 10) = 6\sin\theta_1.$$

$$289\cos^2\theta_1 - 340\cos\theta_1 + 100 = 36 - 36\cos^2\theta_1.$$

化簡可得：

$$325\cos^2\theta_1 - 340\cos\theta_1 + 64 = 0.$$

$$\cos\theta_1 = 4/5 \text{ 或 } 16/65(\text{不合}).$$

(d) 質量為  $m$  的小球之質心相對於半球的位置為

$$\vec{r}(t) = R\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\} :$$

半球底部的中心點座標為 $x(t)\hat{x}$ .

小球的速度及加速度分別為

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + R\dot{\theta}\{\cos\theta(t)\hat{x} - \sin\theta(t)\hat{y}\}. \quad (1)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + R\ddot{\theta}\{\cos\theta(t)\hat{x} - \sin\theta(t)\hat{y}\} - R\dot{\theta}^2\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\}. \quad (2)$$

由水平方向動量守恆及力學能守恆知

$$m(\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\theta) + M\dot{x} = 0. \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgR\cos\theta(t) = mgR. \quad (4)$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta}.$$

由(3)、(4)化簡可得

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(M+m)g(1-\cos\theta)}{R(M+m\sin^2\theta)}} = \sqrt{\frac{4(M+m)g}{R(M+m\sin^2\theta)}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

由(3)可得

$$\vec{u} = \dot{x}(t)\hat{x} = \sqrt{\frac{4(M+m)Rg}{(M+m\sin^2\theta)}} \sin(\theta/2) \left\{ -\frac{m}{M+m} \cos\theta \hat{x} \right\}. \quad (6)$$

將上面的結果帶入(1)可得

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{4(M+m)Rg}{(M+m\sin^2\theta)}} \sin(\theta/2) \left\{ \frac{M}{M+m} \cos\theta \hat{x} - \sin\theta \hat{y} \right\}.$$

(e) 由牛頓第二運動定律:

$$F_N\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\} - mg\hat{y} = m\vec{a}(t). \quad (7)$$

其中 $m\vec{a}(t) = \{m\ddot{x}\hat{x}\} + mR\ddot{\theta}\{\cos\theta(t)\hat{x} - \sin\theta(t)\hat{y}\} - mR\dot{\theta}^2\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\}$ .

將(7)式投影到小球運動的法線方向 $\{\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\}$ :

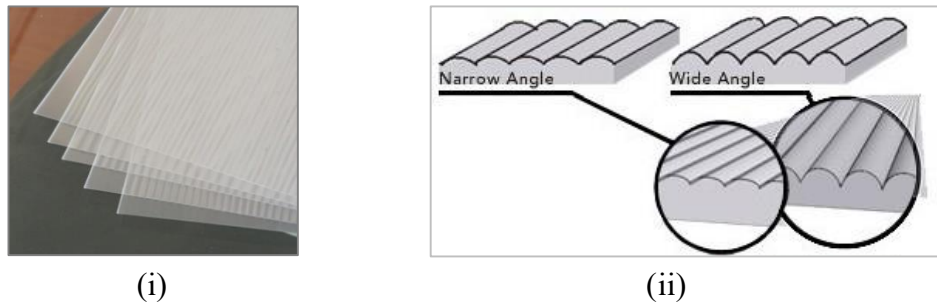
$$F_N = m\ddot{x}\sin\theta - mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta. \quad (8)$$

將(5)、(6)式的結果帶入(7)式可求得半球作用在小球的正向力

$$F_N = \frac{Mmg}{(M+m\sin^2\theta)^2} \{(M+m)(3\cos\theta - 2) - m\cos^3\theta\}.$$

【第二題】

隨題所附的材料袋中，有一片被稱為 Lenticular sheet 或 Lenticular lens sheet 的塑質膠片，圖 1(i)為此膠片的實物影像。其結構示意圖請參見圖 1(ii)，一面是橫截面為圓弧型的柱狀條被整齊排列地壓製在平整的光滑膠面上；柱狀條的間距相等(以柱狀密度 LPI 為規格)。圖 1(iii)呈列出此塑質膠片選用時，必須考慮的幾項重要的規格。



選用此材料規格時，必須考慮的幾項基本因數：

1. 用途？
2. 觀看時的視角
3. 圓弧的半徑  $r$
4. 弧角  $\theta$
5. 厚度  $T$
6. 觀賞距離  $t$
7. 材質
8. 柱條密度或線距(Pitch)：
  - 每英寸的柱狀條數 LPI = line per inch
  - 線距(Pitch) = 25.4 mm/LPI

(iii)

圖 1 Lenticular sheet 塑質片。(i)實物影像圖；(ii) 結構示意圖；(iii)塑質膠片選用時，必須考慮的幾項重要結構規格和參數。[參考文獻 1-4]

(a) 材料袋內另有四張如圖 2(i)-2(iv)所呈現的線條圖卡，請取出，並以 Lenticular sheet 「分別」觀察此四張線條圖卡。請詳細描述你觀察到的現象或結果？(5 分)

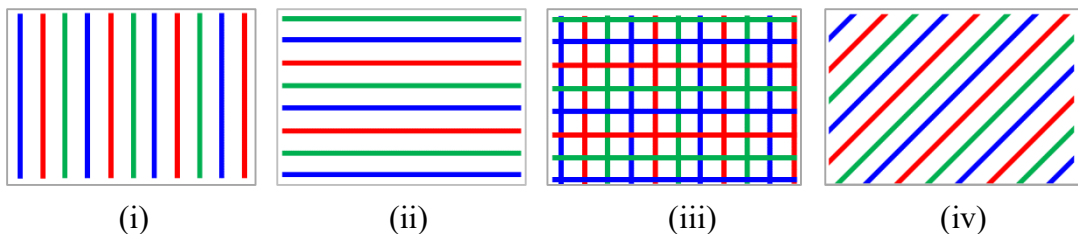


圖 2 線條圖卡

(b) 光學分幾何光學領域（如反射、折射……）及物理光學領域（如干涉、繞射……），請問您所觀察到的現象或結果屬於哪個領域的哪個現象？(5 分)

- (c) 請詳細解釋您所觀察到之結果的科學原因？ (5 分)
- (d) 此物美價廉的 Lenticular sheet 塑質材料已大量應用於諸多領域中，請試著至少列舉出三個應用範例，或您認為可以如何應用？ (5 分)
- (e) 請用材料袋內所附的雷射筆，並以桌面當成成像面，觀察類似圖 3 的現象。請問什麼情況才能獲得如圖中所呈現的圓？請說明所得之圓的半徑大小受哪些因素影響？ (5 分)

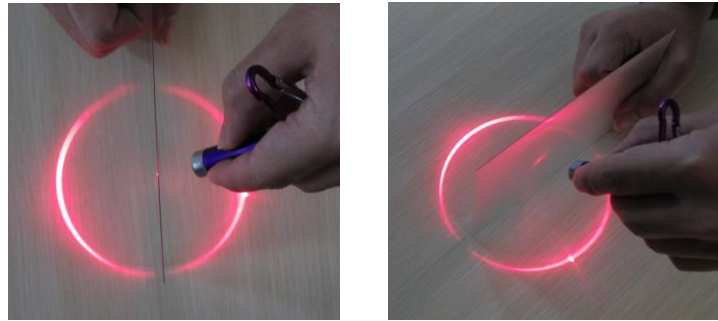


圖 3 雷射光照射 Lenticular 膠片所得之結果

- (f) 請試著解釋產生此現象的原因 (可以文字說明搭配雷射光光徑的示意圖作答)。 (5 分)

參考資料：

1. <http://www.snapily.com/blog/101-of-lenticular-lenses/>
2. [https://en.wikipedia.org/wiki/Lenticular\\_lens](https://en.wikipedia.org/wiki/Lenticular_lens)
3. [http://www.genesis3d.com.tw/G3D/lenticular/lenticular\\_design.htm](http://www.genesis3d.com.tw/G3D/lenticular/lenticular_design.htm)
4. [https://en.wikipedia.org/wiki/Lenticular\\_printing](https://en.wikipedia.org/wiki/Lenticular_printing)



## 【第二題參考解】

(a)

1. 若 Lenticular sheet 緊貼圖 2 的任一張圖卡，則 Lenticular sheet 就僅如同一般透明片，可直接觀看到圖卡上完整的線條組。
2. 但當 Lenticular sheet 以距圖卡僅數公分以上的距離觀看時，則僅能看到與 Lenticular sheet 之柱條組互相垂直的線條組，其他方向的線條組則無法觀測到。
3. 如橫向排列的 Lenticular sheet 可看到垂直排列的線條組，反之透過垂直排列的 Lenticular sheet 僅可看橫向水平排列的線條組。而對角線條組，則需 Lenticular sheet 上的透鏡柱狀條也以對角排列的方式，且成垂直才能看到。

(b) 幾何光學領域.....

(c) 導因於平凸柱狀透鏡的成像原理，將圖卡上的圖案視為是位於距焦距無限遠處的實物，故其實像變成無限小。

凸透鏡成像		$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$		NTHU ISEC 國立清華大學 資訊科學教育研究中心	
#	實物位置 $P$	像的性質 ( $f$ 為焦距)			
		位置 $q$	實像? 虛像?	正立? 倒立?	縮小? 放大?
1.	無窮遠處	他方焦距上	實像	倒立	一點
2.	二倍焦距外	他方焦距與二倍焦距間	實像	倒立	縮小
3.	二倍焦距上	他方之二倍焦距上	實像	倒立	相等
4.	焦點與二倍 焦距間	他方之二倍焦距外	實像	倒立	放大
5.	焦點上	無窮遠			
6.	焦點內	與實物處在同一方	虛像	正立	放大

(d) 利用此塑膠片的簡單結構和原理可以用來使圖案或影像產生不同的效果

1. 3D /深度效果
2. 動作效果
3. 翻轉效果
4. 縮放效果
5. 變形效果

過去，此透鏡片大量應用於 Lenticular printing (透鏡印刷技術)，多用於娛樂或廣告的用途，但近 20 年來，發現使用於下列的應用價值甚至遠遠印刷的用途。其中包括：

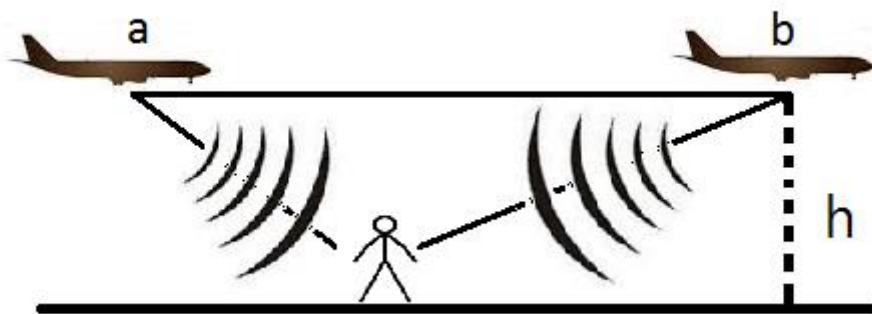
1. 3D 顯示
2. 眼睛矯正鏡片 (Bifocals)
3. 標牌
4. 產品包裝
5. 雜誌插入頁面的特殊設計
6. 舊電影單色到彩色轉換

(e)

1. 當透鏡式柱狀條紋垂直立於桌面時, 雷射光入射至直條紋的角度  $\theta$  和  $\phi$
  2. 條紋密度 LPI
  3. 每一透鏡條紋的弧角  $t, r$
  4. 雷射光的波長(??)
- .....

【第三題】

- (a) 如圖所示，飛機以  $250 \text{ m/s}$  的等速度與等高度飛行，從靜止不動的觀察者前方 a 位置飛到觀察者後方 b 位置，飛行時間差距為  $5 \text{ s}$ 。當飛機在 a 位置時觀察者量測到的飛機發出的音頻為  $2000 \text{ Hz}$ ，當飛機在 b 位置時測量到的音頻變為  $800 \text{ Hz}$ ，如果飛機引擎振動頻率為  $1200 \text{ Hz}$ ，請求出飛機高度  $h$  為多少？（假設聲音速度為  $330 \text{ m/s}$ ）（15 分）
- (b) 如果地面觀察者持續發出音頻為  $1500 \text{ Hz}$  的噪音，請問在飛機上的飛行員分別在 a 與 b 位置時，聽到的噪音頻率為多少  $\text{Hz}$ 。（15 分）



### 【第三題參考解】

(a) 都卜勒公式：

$$f' = f(v \pm v_0 \cos \beta) / (v \pm v_s \cos \alpha)$$

$f'$  與  $f$  分別為觀察者測量到與聲源的頻率， $v$  為聲音速度， $v_0$  為觀察者行進速度， $v_s$  為聲源速度， $\beta$  為聲音傳到觀察者的方向與觀察者運動方向所夾的角度， $\alpha$  為聲音傳到觀察者的方向與聲音源運動方向所夾的角度。

假設發射音頻物體速度為  $u$

在前方時量到的音頻為

$$f_a = \frac{v}{v - u \cos \theta_a} f_0$$

所以

$$\cos \theta_a = \frac{v(f_a - f_0)}{u f_a} = 0.58$$

在後方時量到的音頻

$$f_b = \frac{v}{v + u \cos \theta_b} f_0$$

所以

$$\cos \theta_b = \frac{v(f_0 - f_b)}{u f_b} = 0.66$$

飛行長度為

$$ut = 250 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \times 5(\text{s}) = 1250(\text{m})$$

因為

$$ut = h \times (\cot \theta_a + \cot \theta_b)$$

所以

$$h = \frac{ut}{\frac{\cos \theta_a}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_a}} + \frac{\cos \theta_b}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_b}}} = 657.4(\text{m})$$

(b) 飛機在 a 點聽到的音頻為

$$f' = \frac{f(v + u \cos \theta_a)}{v}$$

$$f' = 1500 \times \frac{330 + 250 \times 0.528}{330} = 2100(\text{Hz})$$

飛機在 b 點聽到的音頻為

$$f' = \frac{f(v - u \cos \theta_b)}{v}$$

$$f = 1500 \times \frac{330 - 250 \times 0.66}{330} = 750(\text{Hz})$$

### 【第四題】

物質中有許多的正電荷與負電荷，許多的材料性質都是由這些等量的正負電荷所決定。若有  $N$  個電荷，這些電荷的"電偶極矩" $\vec{p}$ ，定義為：

$$\vec{p} \equiv \sum_i^N q_i \vec{r}_i, \quad (1)$$

其中  $q_i$  為第  $i$  個電荷的電荷， $\vec{r}_i$  為位置向量。

- (a) 例如一個正電荷與一個負電荷組成的電偶極，若有一個正電荷  $+e$  在  $\vec{r}_+ = R\hat{x}$  (其中  $R$  是一數字， $\hat{x}$  為  $x$  方向的單位向量)，一個負電荷  $-e$  在  $\vec{r}_- = 0$ 。則此一電偶極的電偶極矩是：

$$\vec{p} = e\vec{r}_+ + (-e)\vec{r}_- = eR\hat{x}.$$

若正電荷在  $x$  軸上向左移動  $d$  的距離，則電偶極矩的變化量  $\Delta\vec{p}$  為多少？(3分)

- (b) 兩個相距  $r$  的電荷  $q_1$  和  $q_2$  之間的電位能為：

$$U(r) = \frac{kq_1q_2}{r},$$

$k$  為常數， $r$  為距離。若有一個一維無限長的離子晶體，由交替的正負離子組成，如圖 1，正電荷和負電荷的距離為  $R$ 。



圖 1

計算所有電荷的電位能。可使用以下公式

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

其中  $\log_e$  為自然對數，是以  $e$  為底數的對數函數， $e=2.7182\dots$  為一常數。答案直接以  $k, e, R, \log_e$  表示，不需用計算機算出  $\log_e$  函數的值。(7分)

- (c) 對於以上一維的無限長離子晶體，方程式(1)計算出的電偶極矩會是無窮大。所以對巨觀尺度的晶體，會使用單位體積的電偶極矩  $(\frac{\vec{p}}{\text{體積}}) \equiv \frac{\sum_i^N q_i \vec{r}_i}{\text{體積}}$ ，來描述晶體的電偶極性質，稱為電極化強度，使用大寫  $\vec{P}$  符號代表。以上面討論的一維晶體來說，就是

$$\vec{P} = \frac{\sum_i^N q_i \vec{r}_i}{\text{長度}}.$$

又因為晶體是週期性的，所以可以計算一個週期的單位長度電偶極矩，就會等於 $\vec{P}$ 。例如以上一維晶體，可如圖 2，一個週期有一顆正離子與一顆負離子。

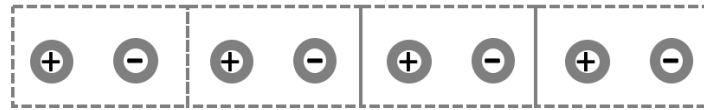


圖 2

計算此一維晶體的單位長度電偶極矩 $\vec{P}$ 。(5分)

(d) 將晶體分成週期性單元的方法不只一種，例如，以上晶體也可以用圖 3 分法：

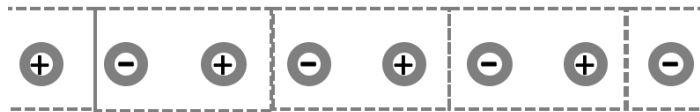


圖 3

計算此一維晶體的單位長度電偶極矩 $\vec{P}$ 。你得到的答案跟(c)題相同嗎？(5分)

- (e) 若使用(c)中的週期分法，然後將每個正電荷向左移一格 (位移  $2R$ )。那麼，使用(a)的結果，該單元的電偶極矩的變化量為多少？此一維晶體的單位長度電偶極矩 $\vec{P}$ 變為多大？與(c)和(d)是否一樣？(5分)
- (f) 如(e)小題，若將每個正電荷向左移 2,3,4...格或向右移 1,2,3...格，其實每個單元的正電荷都移動後，晶體仍然是由正負相間的離子組成，並無改變。同樣使用(a)的結果，寫出所有此一維晶體的單位長度電偶極矩 $\vec{P}$ 可能的值。(5分)

【第四題參考解】

(a)  $\Delta\vec{p} = (+e)(-d\hat{x}) = -ed\hat{x}$

(b)  $U = \left[-\frac{ke^2}{R} + \frac{ke^2}{2R} - \frac{ke^2}{3R} + \frac{ke^2}{4R} + \dots\right] + \left[-\frac{ke^2}{R} + \frac{ke^2}{2R} - \frac{ke^2}{3R} + \frac{ke^2}{4R} + \dots\right]$

contributions from the left and right hand sides.

$$= -2 \cdot \frac{ke^2}{R} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right]$$

使用公式： $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

$$= -(2 \ln 2) \frac{ke^2}{R}$$

(c) 一個單元的長度是  $2R$ ，

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{e\vec{r}_+ + (-e)\vec{r}_-}{2R} \\ &= \frac{e \cdot 0.5R\hat{x} + (-e)1.5R\hat{x}}{2R} \\ &= \frac{-eR\hat{x}}{2R} \\ &= -\frac{e}{2}\hat{x}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{e\vec{r}_+ + (-e)\vec{r}_-}{2R} \\ &= \frac{(-e) \cdot 0.5R\hat{x} + e \cdot 1.5R\hat{x}}{2R} \\ &= \frac{eR\hat{x}}{2R} \\ &= \frac{e}{2}\hat{x}\end{aligned}$$

跟上小題得到的不同，且極化方向完全相反。

(e) 使用(a)的結果，代入  $d = 2R$ ：

$$\Delta\vec{p} = -2eR\hat{x}$$

則

$$\vec{P} = -\frac{e}{2}\hat{x} + \frac{\Delta\vec{p}}{2R}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{e}{2}\hat{x} - e\hat{x} \\
 &= -\frac{3e}{2}\hat{x}
 \end{aligned}$$

與前兩小題都不同。

(f) 使用(a)的結果，代入  $d=4R$ ：

$$\Delta\vec{p} = -4eR\hat{x}$$

則

$$\begin{aligned}
 \vec{p} &= -\frac{e}{2}\hat{x} + \frac{\Delta\vec{p}}{2R} \\
 &= -\frac{e}{2}\hat{x} - 2e\hat{x} \\
 &= -\frac{5e}{2}\hat{x}
 \end{aligned}$$

依序代入可得到：

$$\vec{p} = \dots, -\frac{5e}{2}\hat{x}, -\frac{3e}{2}\hat{x}, \frac{e}{2}\hat{x}, \frac{e}{2}\hat{x}, \frac{3e}{2}\hat{x}, \frac{5e}{2}\hat{x}, \dots$$



### 【第五題】

如圖 1 所示，一個截面積為  $A$  的柱形容器垂直豎立，容器內有厚度為  $t$  的活塞。此活塞由密度為  $\rho$  的某種材質製成，且與器壁無摩擦。活塞將容器隔成兩區，活塞下方為某種單原子分子氣體，上方為某種雙原子分子氣體。在溫度  $T_0$  時，系統達到平衡，下區的壓力為  $p_{a,0}$ ，長度為  $L_a$ ，上區的長度為  $L_b$ 。

假設緩慢升高系統溫度時，少量的雙原子分子氣體會分解成單原子分子氣體，分解的比例是原來總分子數的  $\Delta T/T_0$ ， $\Delta T$  是系統升高的溫度，且  $\Delta T$  遠小於  $T_0$ 。若在升溫過程中發現活塞緩慢上升，則活塞的厚度  $t$  應滿足的條件為何？(假設在升溫過程中，容器與活塞的熱膨脹均可忽略)

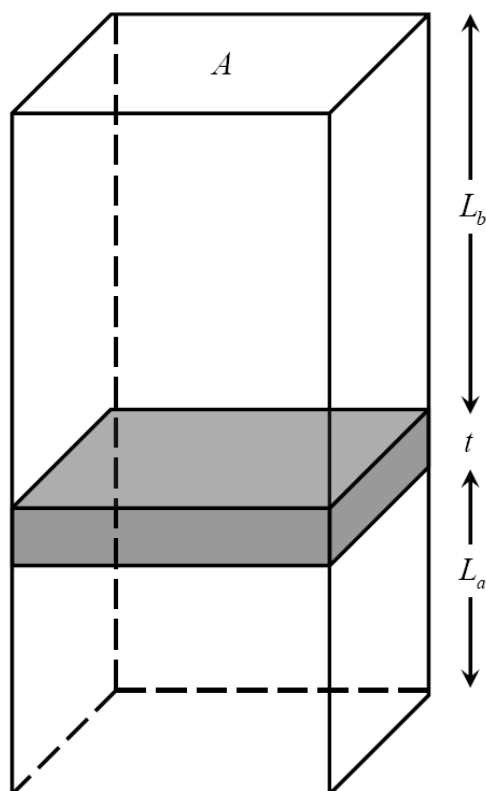


圖 1

### 【第五題參考解】

設活塞質量為  $m$ ，在  $T_0$  時，活塞下方的壓力為  $p_{a,0}$ ，上方的壓力為  $p_{b,0}$ 。此時系統達到平衡，活塞在垂直方向所受之合力為 0，因此

$$\begin{aligned}\sum F_y &= p_{a,0}A - p_{b,0}A - mg = 0 \\ \rightarrow p_{a,0}A - p_{b,0}A - At\rho g &= 0 \\ \rightarrow p_{b,0} &= p_{a,0} - t\rho g \quad (1)\end{aligned}$$

先假設在升溫過程中活塞不動，計算上下兩區內的壓力。

設下區的壓力在溫度升到  $T_0 + \Delta T$  時為  $p_a$ ，因體積不變，壓力與溫度成正比，故

$$\begin{aligned}\frac{p_a}{p_{a,0}} &= \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} \\ \rightarrow p_a &= p_{a,0} \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \quad (2)\end{aligned}$$

設在  $T_0$  時，上區內分子的莫耳數為  $n_0$ ，由(1)式知區內壓力  $p_{b,0}$  為  $p_{a,0} - t\rho g$ ，理想氣體方程式可寫成

$$(p_{a,0} - t\rho g)(AL_b) = n_0RT_0 \quad (3)$$

當溫度升到  $T_0 + \Delta T$  時，上區內分子的莫耳數變為  $n$

$$n = n_0 - n_0 \frac{\Delta T}{T_0} + 2n_0 \frac{\Delta T}{T_0} = n_0 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \quad (4)$$

設此時壓力為  $p_b$ ，則理想氣體方程式可寫成

$$\begin{aligned}p_b(AL_b) &= n_0 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) R(T_0 + \Delta T) \\ &= n_0RT_0 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \quad (5)\end{aligned}$$

將(5)除以(3)得

$$\frac{p_b}{p_{a,0} - t\rho g} = \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2$$

因此

$$p_b = (p_{a,0} - t\rho g) \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \quad (6)$$

由(2)與(6)可得溫度  $T_0 + \Delta T$  時，活塞在垂直方向所受之合力

$$\begin{aligned}
\sum F_y &= p_a A - p_b A - At\rho g \\
&= p_{a,0} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) A - (p_{a,0} - t\rho g) \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 A - At\rho g \\
&= \left[ p_{a,0} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) - (p_{a,0} - t\rho g) \left(1 + 2\frac{\Delta T}{T_0} + \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2\right) - t\rho g \right] A \\
&= \left[ -p_{a,0} \frac{\Delta T}{T_0} - p_{a,0} \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 + 2t\rho g \frac{\Delta T}{T_0} + t\rho g \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \right] A \\
&= \left[ (2t\rho g - p_{a,0}) \frac{\Delta T}{T_0} + (t\rho g - p_{a,0}) \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \right] A
\end{aligned}$$

因為 $\Delta T$  遠小於  $T_0$ ，故 $(\Delta T/T_0)^2$  項與 $(\Delta T/T_0)$  項比較後可忽略，因此

$$\sum F_y \approx (2t\rho g - p_{a,0}) \frac{\Delta T}{T_0} A \quad (7)$$

當活塞在垂直方向所受之合力大於 0 時，活塞上升，故

$$\begin{aligned}
2t\rho g - p_{a,0} &> 0 \\
\rightarrow t &> \frac{p_{a,0}}{2\rho g} \quad (8)
\end{aligned}$$

此即活塞的厚度  $t$  應滿足的條件。