106學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第9區複賽物理科筆試參考解

【第一題】

某日太陽、月球及地球的相對位置如圖一，已知太陽的質量為1.98×10^{30}公斤，月球的質量為7.34×10^{22}公斤，太陽距離地球$R_s=1.496\times10^{11}$公尺，月球距離地球為$R_m=3.84\times10^{8}$公尺，地球半徑為$R_E=6.37\times10^{6}$公尺

圖一

(1) 計算月球對地球的引力及太陽對地球的引力比值的絕對值 [4%]

(2) 計算月球對地表 A 處與 D 處的引力差值及太陽對地表 A 處與 D 處的引力差值之比值的絕對值(提示：因 $R_s>>R_E$ 且 $R_m>>R_E$ ，取差值可取至 R_E/R_m 的一次項即可，並利用此數學近似：$(1+x)^n\approx1+nx$ 當 $x\approx0$) [4%]

(3) 由(1)及(2)的計算結果來評論月球或太陽對潮汐現象的影響何者較大 [2%]

(4) 將地球描繪成如上圖之圓形，於此圓外描繪地球上的海水(潮汐)高度分佈(請記得標上點 A,B,C,D 於圓上) [2%]

(5) 某觀測者於傍晚 6 點時位於點 C 的海岸邊，試問傍晚 6 點到 7 點時該觀測者所見的月亮形狀(畫圓並標明亮、暗區) [2%]及潮汐現象(漲潮或退潮) [1%]

【參考解】

(1) 設 M_s 為太陽質量，M_m 為月球質量，M_E 為地球質量，G 為重力常數

月球對地球的引力/太陽對地球的引力$=\dfrac{GM_mM_E}{{R_m}^2}\Big/\dfrac{GM_sM_E}{{R_s}^2}\approx 0.00563$ (or 1/177.73)

(2) 月球對地表 A 處與 D 處的引力差值：

$$\frac{GM_mM_E}{(R_m-R_E)^2}-\frac{GM_mM_E}{{R_m}^2+{R_E}^2}=\frac{GM_mM_E}{{R_m}^2}\left\{(1-\frac{R_E}{R_m})^{-2}-(1+\frac{{R_E}^2}{{R_m}^2})^{-1}\right\}\approx\frac{GM_mM_E}{{R_m}^2}\left\{\left(1+2\frac{R_E}{R_m}\right)-(1-\frac{{R_E}^2}{{R_m}^2})\right\}\approx 2\frac{GM_mM_ER_E}{{R_m}^3}$$

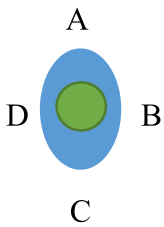
相似的計算出太陽對地表 A 處與 D 處的引力差值$\approx 2\dfrac{GM_sM_ER_E}{{R_s}^3}$

因此月球對地表 A 處與 D 處的引力差值/太陽對地表 A 處與 D 處的引力差值

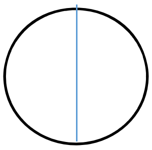
為$\dfrac{M_m{R_s}^3}{M_s{R_m}^3}\approx 2.19$

(3) 由(2)知月球對潮汐現象的影響較大，因為潮汐現象和各處的重力差有關，和重力的絕對大小無關

(4)



(5)

亮  暗

由位置 C→B →退潮

◎近似值若取至不同程度，數值略為不同的參考資料：)

(2) 月球對地表 A 處與 D 處的引力差值：

$$\frac{GM_mM_E}{(R_m-R_E)^2} - \frac{GM_mM_E}{R_m^2+R_E^2} = \frac{GM_mM_E}{R_m^2}\left\{\left(1-\frac{R_E}{R_m}\right)^{-2} - \left(1+\frac{R_E^2}{R_m^2}\right)^{-1}\right\}$$

$$\approx \frac{GM_mM_E}{R_m^2}\left\{\left(1+2\frac{R_E}{R_m}\right) - \left(1-\frac{R_E^2}{R_m^2}\right)\right\} \approx \frac{GM_mM_E(2R_ER_m+R_E^2)}{R_m^4}$$

相似的計算出太陽對地表 A 處與 D 處的引力差值 $\approx \frac{GM_SM_E(2R_ER_S+R_E^2)}{R_S^4}$

因此月球對地表 A 處與 D 處的引力差值/太陽對地表 A 處與 D 處的引力差值

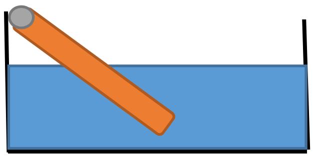
為 $\frac{M_mR_S^4(2R_m+R_E)}{M_SR_m^4(2R_S+R_E)} \approx 2.21$

【第二題】

一均勻木棒斜放於一內含某種液體的容器(如圖二所示)，3/5的棒長沉於一面底下，棒子另一端固定於一可自由轉動的軸上

(1) 找出液體和棒子的密度比值 [9%]

(2) 用手稍微增大棒子和器壁的夾角再放開，棒子開始會於原平衡位置附近震盪，若以同設備但改變液體密度為原液體密度的兩倍，忽略液體流動及黏滯力的效應，新的震盪週期 (A)較原震盪週期大 (B)較原震盪週期小 (C)和原震盪週期相同 ________(填A或B或C) [1%]，請簡單解釋你的理由 [2%]



圖二

(3) 用手稍微增大棒子和器壁的夾角再放開，棒子開始會於原平衡位置附近震盪，若以同設備同液體但將此實驗移至月球表面上進行，忽略液體流動及黏滯力的效應，新的震盪週期 (A)較原震盪週期大 (B)較原震盪週期小 (C)和原震盪週期相同 ________(填 A 或 B 或 C) [1%]，請簡單解釋你的理由 [2%]

【參考解】

(1) 設棒子密度為 d，液體密度為ρ，棒子總長為 L。棒子藉由液體的浮力達成靜力平衡，在此問題固定端的轉軸可提供向上或向下的力，因此合力平衡無法確知浮力和重力的比例，此比例可由合力矩為零得出：

以固定端的轉軸為轉動軸心：$(d \times L) \times g \times \frac{L}{2} = \left(\rho \times \frac{3}{5}L\right) \times g \times \frac{7L}{10} \rightarrow \frac{\rho}{d} = \frac{25}{21}$

(2) (A)；題(2)及下題(3)是簡諧振盪的應用，可以單擺(擺線長 L)於重力加速度 g 的重力場週期：$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 來想，本題中等效重力場的方向是沿著棒子的(平衡位置)方向，當液體密度增加時棒子及器壁的夾角增加，故等效重力 g 減少，因此週期增加

(3) (A)；月球的重力加數度是地球的 1/6，故週期增大

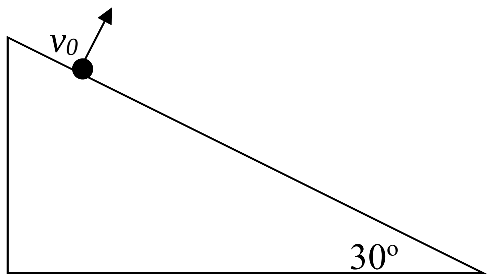
【第三題】

如圖三，在仰角 30^o 的斜面上斜向拋射一質點，質量為 2 kg，初速 v_o=7.5 m/s 垂直斜面。若斜面夠長，質點落於斜面上（重力加速度 g =10 m/s^2）。

(1) 質點落於斜面上的位移大小為何？[5%]

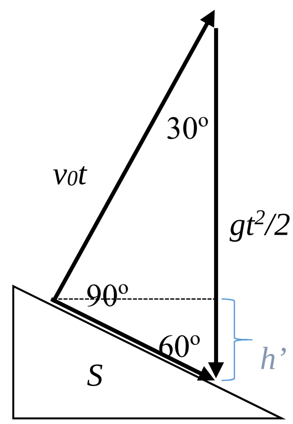
(2) 質點飛行過程中任意區間，重力做功之最大量值為何？[5%]

(3) 質點飛行過程中，俯角為37^{o}時飛行軌跡之曲率半徑為何？[5%]



圖三

【參考解】



(1) $\vec{S}=\overrightarrow{v_0}t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ 三個向量可圍成一封閉直角三角形。

$S: v_0t: \frac{1}{2}gt^2=1:\sqrt{3}:2$ ，$v_0=7.5$ & $g=10$,

$\Rightarrow t=\sqrt{3}$ s & $S=7.5$ m。

(2) 重力做功最大量值發生拋體的最高點至落於斜面，

$$h=\frac{(v_0\sin 60^o)^2}{2g}=\frac{\left(7.5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\times 10}=\frac{135}{64}\text{ m}$$

$$h'=S\cos 60^o=7.5\times\frac{1}{2}=\frac{15}{4}\text{ m}$$

重力做功：

$$W=mg(h+h')=2\times 10\times\left(\frac{135}{64}+\frac{15}{4}\right)=\frac{1875}{16}=117.188\text{ J}$$。

(3) 俯角 37^o 時，$a_N=g\cos 37^o=8$，$v=\frac{v_x}{\cos 37^o}=\frac{75}{16}$。

曲率半徑 $R=\frac{v^2}{a_N}=\frac{\left(\frac{75}{16}\right)^2}{8}=\frac{5625}{2048}=2.747\text{m}$。

【第四題】

質量 M 半徑為 R 之實心球以初角速度ω繞水平軸轉動（轉動慣量為$\frac{2}{5}MR^2$），如果它垂直掉落於地面且沒有彈跳，經 t 秒後做純滾動。

(1) 求地面與球面之間的動摩擦係數。（以重力場強度 g、R、ω及 t 表示）[5%]

(2) 球落地到做純滾動之角位移為何？（以ω及 t 表示）[5%]

(3) 球落地經過 $2t$ 秒，過程中摩擦力作功為何？（以 M、R 及ω表示）[5%]

【參考解】

(1) 球落地後，摩擦力令球加速移動且所形成的力矩令球降低轉速。

$$\begin{cases} f = Ma = M \times \dfrac{R\omega' - 0}{t} \\ Rf = I\alpha = \dfrac{2}{5}MR^2 \times \dfrac{-(\omega' - \omega)}{t} \end{cases}$$

$\omega' = \frac{2}{7}\omega$，$f = M \times \frac{\frac{2}{7}R\omega}{t} = \mu M\mathrm{g} \Rightarrow \mu = \frac{2R\omega}{7\mathrm{g}t}$。

(2) ${\omega'}^2 = \omega^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\theta} \Rightarrow \left(\frac{2}{7}\omega\right)^2 = \omega^2 - 2\frac{5\omega}{7t} \times \theta \Rightarrow \theta = \frac{9}{14}\omega t$ 。

(3) $W = \Delta E_k = \left[\frac{1}{2}I{\omega'}^2 + \frac{1}{2}M{v'}^2\right] - \left[\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2\right]$

$$W = \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}MR^2\left(\frac{2}{7}\omega\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{2}{7}R\omega\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}MR^2\omega^2 + 0\right] = -\frac{MR^2\omega^2}{7}$$ 。