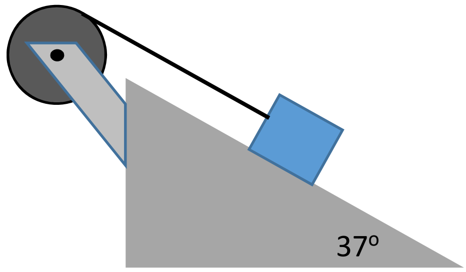
106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
臺灣省第 6 區複賽物理科筆試參考解

一、　如圖所示，一個 3 kg 的木塊靜止於仰角 37° 的斜面上，木塊與斜面之間的摩擦係數 μ=0.4。其中一端以質量可忽略不計的細線捲繞在質量與半徑分別為 1 kg 與 10 cm 的實心轉輪上，轉軸阻力可忽略。[重力加速度 g=10 m/s^2，轉輪之轉動慣量 I (=MR^2/2) 需自行計算出量值。]



a. [5 分]木塊釋放後，轉輪的角加速度為多少弧度/秒^2？

b. [5 分]木塊自釋放經 2 秒，重力做功為多少焦耳？

參考解一:

(a)

設細線張力為 T，木塊 m 所受斜面之正向力為 N、摩擦力為 f_k

以木塊為自由體：

法向：$N = mg\cos 37^{\circ}$

切向：$mg\sin 37^{\circ} - f_k - T = ma$

其中，摩擦力 $f_k = \mu N = \mu mg\cos 37^{\circ}$

實心轉輪 M 所受之力矩 $\tau = I\alpha \;\Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$ ，得：$T = \frac{1}{2}MR\alpha$

代入切向之運動方程式：$mg\sin 37^{\circ} - \mu mg\cos 37^{\circ} - \frac{1}{2}MR\alpha = mR\alpha$

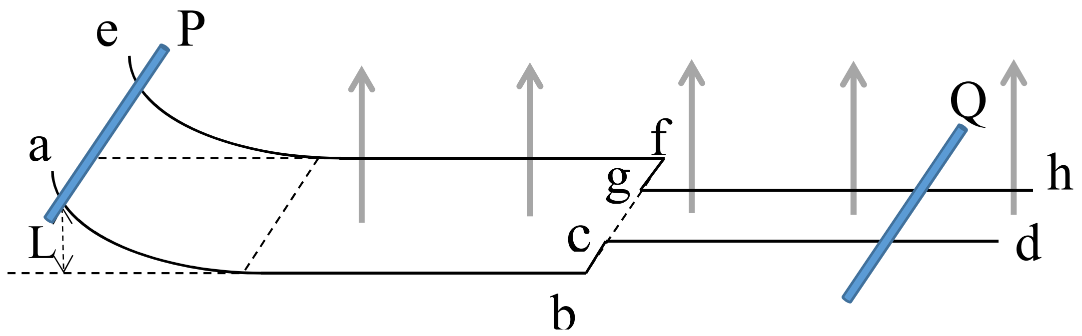
$$\text{故：}\alpha = \frac{mg\left(\sin 37^{\circ} - \mu\cos 37^{\circ}\right)}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R} = \frac{3.0\times 10\times\left(0.6 - 0.4\times 0.8\right)}{\left(\frac{1}{2}\times 1.0 + 3.0\right)\times 0.10} = 24 \quad \text{rad/s}^2$$

(b)

自釋放經 2.0 秒，重力作功

$$W_g = \left(mg\sin 37^{\circ}\right)\left(\frac{1}{2}at^2\right) = \left(3.0\times 10\times 0.6\right)\left(\frac{1}{2}\times 0.10\times 24\times 2.0^2\right) = 86.4 \approx 86 \quad \text{J}$$

二、　如圖所示，光滑平行導軌 abcd 與 efgh，軌道的水平部分處於鉛直向上的均勻磁場中，ab 段軌道寬度為 cd 軌道寬度的 2 倍($\overline{ae} = \overline{bf} = 2\overline{cg} = 2\overline{dh}$)，軌道足夠長。將質量均為 m 的金屬棒 P 和 Q 分別置於軌道的 ab 段和 cd 段，將 P 從距離水平面軌道高度為 L 的地方由靜止釋放，使其自由下滑。當金屬棒 P 進入軌道的水平部分(磁場區域)，一開始會產生感應電流在兩金屬棒與軌道形成的迴路中。



a. [5 分]當金屬棒 P 滑至水平 ab 段，且到達等速。此時金屬棒 P 和金屬棒 Q 的速度大小比值為何？

b. [5 分]承 a.，金屬棒 P 速度大小為何？

c. [10 分]當金屬棒 P 滑入 cd 段經 2 秒再次到達等速，此 2 秒內金屬棒 Q 所受之平均磁力大小為何？

參考解二:

(a)

當兩棒與導軌組成的封閉迴路 $\Delta\phi = 0$，設速度分別為 v_P、v_Q，則：$v_Q = 2v_P$

即：$\dfrac{v_P}{v_Q} = \dfrac{1}{2}$

(b)

對 P、Q 兩棒，由動量衝量原理可知：$-J_P = mv_P - mv_0$、$J_Q = mv_Q - 0$

又因為 $J_P = 2J_Q$

聯立可解得：$v_P = \dfrac{\sqrt{2gL}}{5}$、$v_Q = \dfrac{2\sqrt{2gL}}{5}$

(c)

當 P 亦滑入 cd 段而再次達到等速，兩棒與導軌組成的封閉迴路 $\Delta\phi' = 0$，則：$v_Q' = v_P'$

對 P、Q 兩棒，由動量衝量原理可知：$J_P' = mv_P' - mv_P$、$-J_Q' = mv_Q' - mv_Q$

又因為 $J_P' = J_Q'$

聯立可解得：$v_P' = v_Q' = \dfrac{3\sqrt{2gL}}{10}$

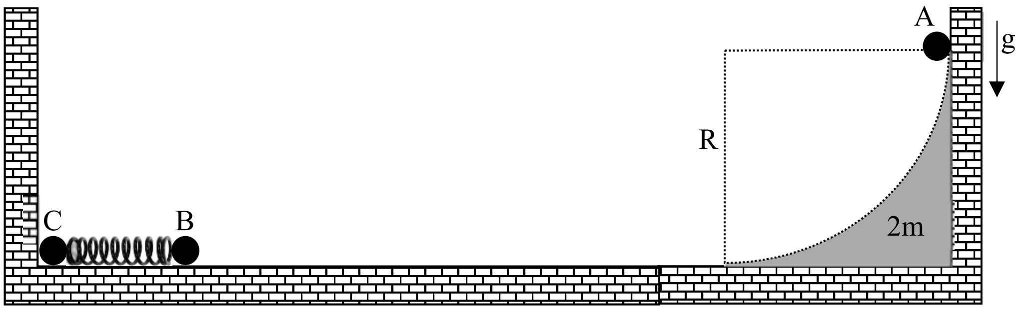
金屬棒 Q 所受之平均磁力大小為 $\overline{F'}_Q = \left|\dfrac{\Delta p_Q'}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{m\left(v_Q' - v_Q\right)}{\Delta t}\right| = \dfrac{m\sqrt{2gL}}{10t}$

三、(20%)

(a)下圖右側為一個半徑為 R，質量為 2m 的四分之一圓弧狀光滑木塊(如灰色區域所示)，緊靠在光滑的地面與牆上，將一質量為 m 的 A 質點從木塊頂端靜止釋放。求當木塊受牆面之最大正向力時，質點與圓心之連線與鉛直線的夾角為何? (7%)

(b)下圖左側為一個彈簧系統，由力常數為 k 的一條彈簧(質量不計)和兩個質量同為 m 的 B 質點與 C 質點所組成，C 質點輕靠牆壁。滑下木塊的 A 質點自右方撞向此彈簧系統，若碰撞後 A 質點與 B 質點就一直連在一起，且因牆壁之作用力，最後彈簧及三質點會一起向右運動，試求在 C 質點離開牆壁後的水平運動期間，彈簧長度的最大變化量為何？(以 m, g, k, R 表示之)(7%)

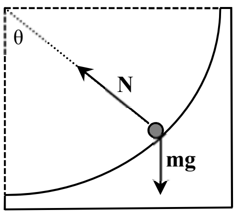
(c)若在上述的碰撞前，B 質點與 C 質點的質量分別改為 2m 與 3m，A 質點質量不變，當經過與上述相同的過程後，請問此次彈簧長度的最大變化量是前一小題情況的幾倍? (6%)

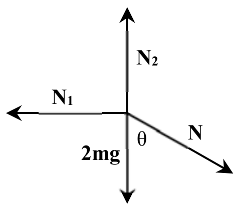


參考解三

一、

(a)設 N 為圓弧狀光滑木塊對小球的正向力，N_1 為牆面對木塊的正向力，N_2 為地面對木塊的正向力，θ 為 N 與鉛直線夾角則小球與木塊之力圖如下：





向心力: $N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$　　　位能轉換成動能: $\frac{1}{2}mv^2 = mgR\cos\theta$

由上兩式可得 $N = 3mg\cos\theta$

$N_1 = N\sin\theta = 3mg\cos\theta\sin\theta = \frac{3}{2}mg\sin 2\theta$

其最大值發生在 θ 為 45^o 時。

(b)設 A 質點碰撞前速度為 v ($v = \sqrt{2gR}$)，

剛碰撞後，A 與 B 質點之向左速度 v_f，

因 $2mv_f = mv$，$\therefore v_f = \frac{1}{2}v$

這兩質點繼續向左壓縮彈簧一段距離後，被彈簧彈回向右運動。當其回到初始碰撞位置時，彈簧恢復為原來長度，這時 C 質點所受牆壁的抗力為 0，彈簧系統開始離開牆壁，A 與 B 質點速度同為$\frac{v}{2}$。

當彈簧長度處於最大變化狀態時，三質點的速度相等(即等於系統質心的速度)。
根據能量守恆定律，總能量＝系統質心動能＋彈性位能。

$$\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(3m)v_c^2+\frac{1}{2}kx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

由動量守恆定律得

$$mv=2mv_f=3mv_c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

由(1)和(2)式解得

$x=\sqrt{\frac{mv^2}{6k}}$ 因$v=\sqrt{2gR}$ ，可得 $x=\sqrt{\frac{mgR}{3k}}$

(c) 由動量守恆定律得

$mv=(m+2m)v_f'=(m+2m+3m)v_c'$

由能量守恆定律得

$$\frac{1}{2}(3m)\left(\frac{v}{3}\right)^2=\frac{1}{2}(6m)\left(\frac{v}{6}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2$$

可得

$x=\sqrt{\frac{mv^2}{6k}}$ 為前一小題情況的 1 倍

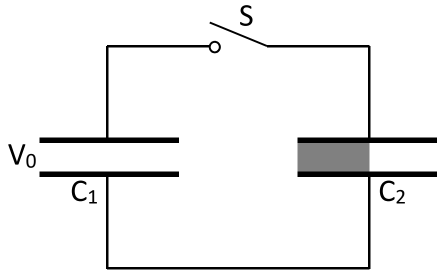
四、(10%)

使平行板電容器 C_1 充電至電位差為 V_0，便將充電之電池移走，並將此電容器與一未充電的平行板電容器 C_2 相連(電容器 C_2 為將介電常數 $\kappa=3$ 的物質填入與 C_1 相同的平行電容器極板間之左半部分)，如圖所示，試問:

(a)當開關 S 連接後，電容器 C_1 的電位差為何？(3%)

(b) C_2 極板上的電荷量為 C_1 電荷量的幾倍？(3%)

(c)開關 S 連接後，系統所儲存的能量是開關連接前的幾倍？(4%)



參考解四

C_2 可視為兩電容 C_k 與 C_{air} 之並聯組合，即 $C_2=C_k+C_{air}$

又 $C_k=\dfrac{\kappa\varepsilon_0 \frac{A}{2}}{d}$　$C_{air}=\dfrac{\varepsilon_0 \frac{A}{2}}{d}$，所以 $C_2=\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}(\dfrac{\kappa+1}{2})=2C_1$

(a) 當開關 S 連接後，起初的電荷 Q_0 由兩電容器所分配，

因此，$Q_0=Q_1+Q_2$，設兩電容器之新電位差為 V，則

$C_1V_0=C_1V+C_2V$，可得 $V=V_0\dfrac{C_1}{C_1+C_2}$

因 $C_2=2C_1$，則 $V=\dfrac{1}{3}V_0$

(b) 因 $C_2=2C_1$，$Q_2= C_2V=2C_1V=2\,Q_1$，即 C_2 的電荷量為 C_1 電荷量的 2 倍

(c) 起初系統所儲存的能量 U_0 為

$$U_0=\frac{1}{2}C_1V_0^2$$

當開關 S 連接後，系統儲存之能量為

$$U=\frac{1}{2}C_1V^2+\frac{1}{2}C_2V^2$$

$$=\frac{1}{2}(C_1+C_2)(\frac{V_0C_1}{C_1+C_2})^2$$

$$=(\frac{C_1}{C_1+C_2})U_0$$

因 $C_2=2C_1$，則 $U=(\dfrac{C_1}{C_1+2C_1})U_0=\dfrac{1}{3}U_0$

所以，開關 S 連接後，系統所儲存的能量是開關連接前的 $\dfrac{1}{3}$ 倍