

106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

【第一題】(10%)

如下圖，質量為 m 的質點從高度為 h 的光滑斜面下滑至光滑地面，與一垂直地面的均勻細棒碰撞並黏附其上，細棒一端懸掛在支點 O 上，另一端接近地面但並未接觸，其長度為 l ，質量為 M ，若細棒繞支點 O 旋轉的最大角度為 60° ，且 $M = m$ ，請問 h 是 l 的幾倍？（均勻細棒繞著支點 O 旋轉的轉動慣量為 $\frac{1}{3}Ml^2$ ）

【第一題參考解】

一、

物體下滑至底部未碰撞細棒前的速率為 $V = \sqrt{2gh}$

在碰撞期間，物體與細棒對支點 O 的角動量是守恆的

$$L = mvl = I\omega$$

物體與細棒繞著支點 O 旋轉的轉動慣量為

$$I = ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2,$$

在剛碰撞後，物體與細棒繞著支點 O 旋轉的角速度為 ω ，則此時物體與細棒的轉動動能為

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{(mvl)^2}{2(m + \frac{M}{3})l^2} = \frac{m^2gh}{m + \frac{M}{3}},$$

當物體與細棒旋轉至最大角度瞬間，系統是靜止的。此時物體的質心升高了

$$h_1 = l(1 - \cos\theta), \text{ 而細棒的質心升高了 } h_2 = \frac{l(1 - \cos\theta)}{2}.$$

所以從物體運動的最低點算起，系統的位能增加為

$$\Delta U = mgh_1 + Mgh_2 = (m + \frac{M}{2})gl(1 - \cos\theta)$$

由能量守恆得知 $\Delta U = K$

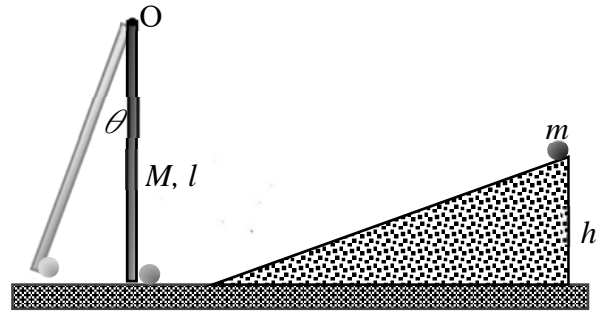
$$\text{因此 } (m + \frac{M}{2})gl(1 - \cos\theta) = \frac{m^2gh}{m + \frac{M}{3}}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{m^2h}{l(m + \frac{M}{2})(m + \frac{M}{3})} = 1 - \frac{6m^2h}{l(2m + M)(3m + M)}$$

若 $M = m$ ，則

$$\cos\theta = 1 - \frac{6m^2h}{l \cdot 3m \cdot 4m} = 1 - \frac{6m^2h}{12m^2l} = 1 - \frac{h}{2l}$$

當 $h = l$ 時， $\theta = 60^\circ$ ，意即，若細棒繞 O 旋轉的最大角度為 60° ， h 是 l 的 1 倍。

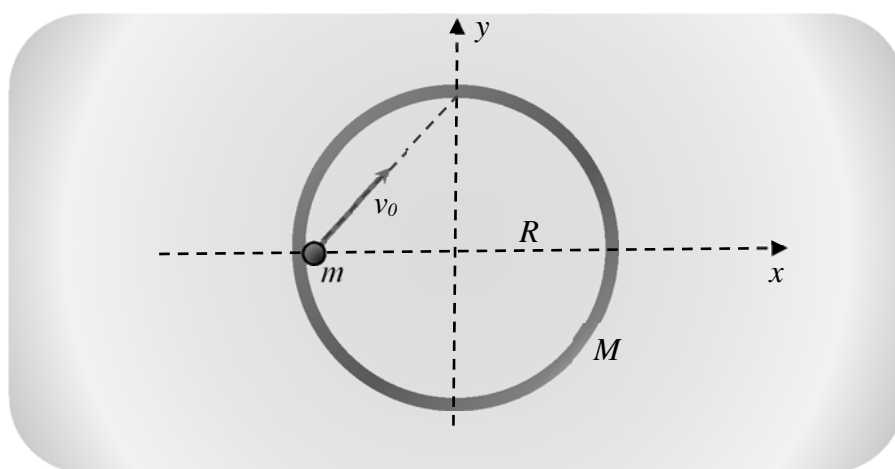


106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

【第二題】、(20%)

如下圖所示，在光滑平面上有一質量為 m 的質點以初速 v_0 且方向與 x 軸夾角 45° 射向一半徑為 R 且質量為 M 的靜止光滑圓環，若質點與圓環發生完全彈性碰撞，且碰撞時間極短忽略不計，試求

- (a) 質點從開始出發到第三次與圓環碰撞，所經過的時間為何? (6%)
(b) 承上題，當發生第三次碰撞時，若此時圓環中心與最初始中心位置的距離為半徑的 $\sqrt{5}$ 倍，請問 M 是 m 的幾倍? (10%)
(c) 若在一開始時將 M 變為原來的 6 倍， m 變為原來的 3 倍， R 與 v_0 皆變為原來的 2 倍，請問在這種情況下，第一次與第二次碰撞所間隔的時間將變為原來的幾倍? (4%)



106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

【第二題參考解】

二、

(a)由於質點與圓環間無摩擦力，所以第一次碰撞後，圓環向正 y 方向運動，

令此速度為 V_y 。若令 v_x, v_y 為 m 在碰撞後的速度分量，則

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$mv_y + MV_y = \frac{1}{\sqrt{2}}mv_0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}MV_y^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 \quad (3)$$

由(2)及(3)，我們得到

$$v_y = \frac{m-M}{m+M} \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$V_y = \frac{2m}{m+M} \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

另外從圓環中心的座標來看質點 m 的速度分量為

$$(\bar{v}_x, \bar{v}_y) = (v_x, v_y) - (0, V_y) = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{-v_0}{\sqrt{2}} \right) \quad (6)$$

明顯地，此時的狀態與出發時相似，只不過我們所在的座標系統不同，因此相鄰兩次碰撞間的時間間隔為

$$\Delta t = \frac{R}{\frac{v_0}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}R}{v_0} \quad (7)$$

因此從出發到第三次碰撞總共經歷了

$$3\Delta t = \frac{3\sqrt{2}R}{v_0}$$

106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

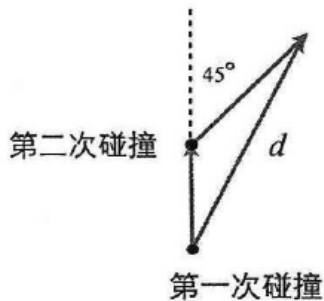
(b) 設 $V^{(i)}$ 為第 i 次碰撞後，圓環中心的速度，則

$$V^{(1)} = \left(0, \frac{2m}{m+M} \frac{v_0}{\sqrt{2}} \right) \quad (8)$$

$$V^{(2)} = \left(\frac{2m}{m+M} \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{2m}{m+M} \frac{v_0}{\sqrt{2}} \right) \quad (9)$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{2m}{m+M} \frac{v_0}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (10)$$

所以從開始到第三次碰撞，環心的位移為 $V^{(1)} \Delta t + V^{(2)} \Delta t$ (如圖)



因此

$$d = |V^{(1)} \Delta t + V^{(2)} \Delta t| = \sqrt{5} |V^{(1)}| \Delta t = \frac{2\sqrt{5}m}{m+M} R$$

當 $M=m$ 時， $d = \sqrt{5}R$ ，所以若圓環中心與最初始中心位置的距離為半徑的 $\sqrt{5}$ 倍，

M 是 m 的 1 倍

(c) 如第一小題參考解所述，

$$\Delta t = \frac{\sqrt{2}R}{v_0}$$

第一次與第二次碰撞所間隔的時間與 M 及 m 無關，若 R 與 v_0 皆變為原來的 2 倍，則時間間隔將為原來的 1 倍。

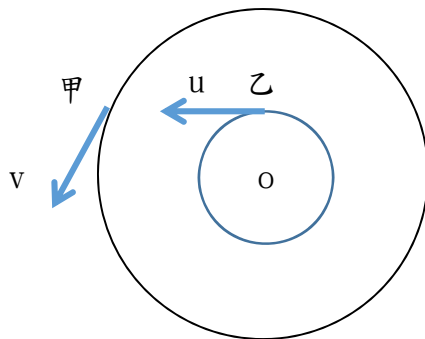
106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

【第三題】(10%)

甲乙兩人玩追逐遊戲，先在地上畫一半徑為 R 的大圓，甲以 v 的等速率沿著圓周跑，乙從圓心 o 出發以 u ($u < v$) 的等速率追著甲跑。經過一段時間後，乙宣稱他與甲的距離變成固定值不再改變。請問乙所說的可能嗎？如果可能，請算出此距離；如果不可能，請說明理由。

【第三題參考解】

甲始終都在大圓圓周上，而且甲的速率大於乙，但是甲乙二人最後距離固定，這代表乙繞著另外一個以 o 為圓心，半徑 r 的小圓運動（如下圖），且甲乙有相同的角速度 ω 。



所以甲乙之間的距離是 $\sqrt{R^2 - r^2}$ ，因為角速度相同，所以 $r\omega = u$

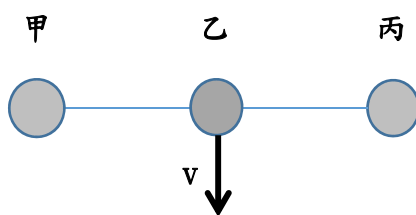
$R\omega = v$ ，因此 $r = uR/v$ ，所以距離是 $R\sqrt{1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2}$ 。

106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

【第四題】(範圍：運動學)

〈題目〉

三顆金屬球甲、乙、丙，其質量分別為 m 、 $3m$ 、 m ，所帶電荷均為 q 。三顆球以兩條長度為 d 之輕的絕緣線連接，並放置在水平無摩擦及絕緣的桌面上。原本三顆球都靜止並形成一直線，如下圖所示，接著一個短暫的水平推力作用於乙球，使其擁有一垂直於絕緣線方向的初速度 v 。請問在後來的運動中，甲丙兩球最小距離是多少?(庫倫常數為 K)



106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

【第四題參考解】

一開始系統的總能量為

$$\begin{aligned} E_t &= T_{\text{甲}} + T_{\text{乙}} + T_{\text{丙}} + V_{\text{甲乙}} + V_{\text{甲丙}} + V_{\text{乙丙}} \\ &= 0 + \frac{1}{2}(3m)v^2 + 0 + K\frac{q^2}{d} + K\frac{q^2}{2d} + K\frac{q^2}{d} \end{aligned}$$

系統的總動量 $P_t = 3mv$ ，系統的質心速度 $V_{cm} = \frac{3}{5}v$ ，因此系統的總能量也

可以用質心動能來表示：

$$\begin{aligned} E_t &= T_{cm} + T_{\text{甲}cm} + T_{\text{乙}cm} + T_{\text{丙}cm} + V_{\text{甲乙}} + V_{\text{甲丙}} + V_{\text{乙丙}} \\ &= \frac{1}{2}(5m)\left(\frac{3}{5}v\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{5}v\right)^2 + \frac{1}{2}(3m)v\left(\frac{2}{5}v\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{5}v\right)^2 \\ &\quad + K\frac{q^2}{d} + K\frac{q^2}{2d} + K\frac{q^2}{d} \end{aligned}$$

後來的運動中，由於系統中的排斥力與絕緣線限制，甲乙丙三球將做一對稱的震盪，但因為沒有外力，所以系統的質心速度、系統的總能量及質心動能都沒改變，當甲丙兩球最小距離時(假設為 D)，系統的總能量為

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t &= T_{cm} + \tilde{T}_{\text{甲}cm} + \tilde{T}_{\text{乙}cm} + \tilde{T}_{\text{丙}cm} + V_{\text{甲乙}} + \tilde{V}_{\text{甲丙}} + V_{\text{乙丙}} \\ &= \frac{1}{2}(5m)\left(\frac{3}{5}v\right)^2 + \tilde{T}_{\text{甲}cm} + \tilde{T}_{\text{乙}cm} + \tilde{T}_{\text{丙}cm} + K\frac{q^2}{d} + K\frac{q^2}{D} + K\frac{q^2}{d} \end{aligned}$$

因為 $E_t = \tilde{E}_t$ ，所以

$$\frac{3}{2}mv^2 + K\frac{5q^2}{2d} = \frac{9}{10}mv^2 + \tilde{T}_{\text{甲}cm} + \tilde{T}_{\text{乙}cm} + \tilde{T}_{\text{丙}cm} + K\frac{2q^2}{d} + K\frac{q^2}{D}$$

簡化後得

$$\frac{6}{10}mv^2 + K\frac{q^2}{2d} = \tilde{T}_{\text{甲}cm} + \tilde{T}_{\text{乙}cm} + \tilde{T}_{\text{丙}cm} + K\frac{q^2}{D}$$

D 最小，即 $K\frac{q^2}{D}$ 最大，這情況將發生在 $\tilde{T}_{\text{甲}cm} + \tilde{T}_{\text{乙}cm} + \tilde{T}_{\text{丙}cm} = 0$ 時

106 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題及參考解

即甲乙丙三球相對於質心是靜止時，所以

$$\frac{3}{5}m v^2 = Kq^2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{2d} \right)$$
$$D = \frac{10dKq^2}{6dmv^2 + 5Kq^2} = \frac{2d}{1 + 6dmv^2/5Kq^2}$$