

107 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 6 區複賽物理科筆試試題及參考解

注意:

- 1.請依題號寫入該題答案卷，否則不予給分。
- 2.請勿將答案卷分解，否則以零分計。
- 3.本次測驗試題共五題，正反面皆有題目。

一、有一傾斜角度未知的斜面，一質量為  $M$  公斤的物體從這個斜面底部出發，沿著斜面以初速  $v$  米/秒 向上滑動了距離  $L$  米後，再沿原路徑向下滑到斜面底部出發點時的速率為  $\frac{v}{4}$  米/秒。則

- (a) 物體與斜面間之動摩擦力為多少牛頓？ (6 分)
- (b) 物體由出發點上滑再下滑至原出發位置，總共經過了多少秒？ (6 分)

【解答】

設物體上滑時的加速度大小為  $a_1$ ，經過時間為  $t_1$ ；下滑時的加速度大小為  $a_2$ ，經過時間為  $t_2$ 。

求加速度大小：

$$\text{上滑時：} v^2 = 2 \cdot a_1 \cdot L, \text{ 得 } a_1 = \frac{v^2}{2L}, \text{ 方向沿斜坡朝下。}$$

$$\text{下滑時：} \left(\frac{v}{4}\right)^2 - 0 = 2 \cdot a_2 \cdot L, \text{ 得 } a_2 = \frac{v^2}{32L}, \text{ 方向沿斜坡朝下。}$$

(a) 考慮摩擦力：

$$\text{上滑時：} M \cdot g \cdot \sin\theta + f_k = M \cdot a_1,$$

$$\text{下滑時：} M \cdot g \cdot \sin\theta - f_k = M \cdot a_2,$$

$$\text{可求出 } f_k = \frac{M}{2} \cdot (a_1 - a_2) = \frac{15}{64} \cdot \frac{Mv^2}{L} \text{ (N)。}$$

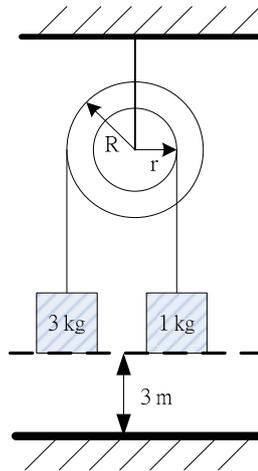
(b) 計算時間：

$$\text{上滑時：} 0 = v - a_1 \cdot t_1, \text{ 得 } t_1 = \frac{v}{a_1} = \frac{2L}{v},$$

$$\text{下滑時：} \frac{v}{4} = 0 + a_2 \cdot t_2, \text{ 得 } t_2 = \frac{v}{4a_2} = \frac{8L}{v},$$

$$\text{總共經過時間} = t_1 + t_2 = \frac{10L}{v} \text{ (s)。}$$

- 二、如下圖，質量 3 kg 與 1 kg 的物體分別以繩子懸吊於一個無摩擦力的輪軸之外圈與內圈。已知輪軸外圈與內圈的半徑比  $R:r=3:1$ 。若輪軸與繩子的質量很小可被忽略，並且重力加速度為  $10 \text{ m/s}^2$ 。兩物體初始位置距離地面 3 m，並用手維持靜止。當手瞬間放開，將兩物體由靜止狀態釋放，則
- (a) 3 kg 的物體著地瞬間的速率為多少  $\text{m/s}$ ？(6 分)
- (b) 1 kg 的物體最高可上升至距地面多少  $\text{m}$ ？(6 分)



**【解答】**

當 3 kg 的物體著地瞬間，其高度下降了 3 m，所以 1 kg 的物體上升了 1 m，距地面 4 m。

若 3 kg 的物體著地瞬間速度大小為  $v$ ，此時 1 kg 的物體向上的速率為  $\frac{v}{3}$ 。

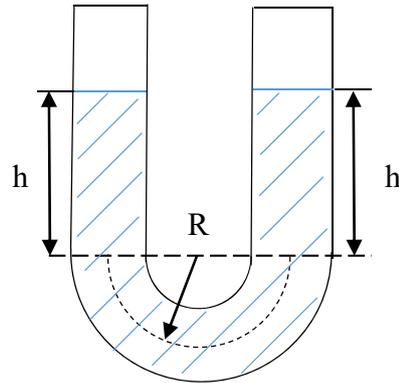
(a) 由力學能守恆， $3 \cdot 10 \cdot 3 + 1 \cdot 10 \cdot 3 = 1 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{v}{3}\right)^2$

可求出  $v = \sqrt{\frac{360}{7}} = 6\sqrt{\frac{10}{7}} = \frac{6}{7}\sqrt{70} \approx 7.17 \text{ (m/s)}$

(b) 此時 1 kg 物體之向上速率為  $\frac{v}{3} = \frac{2}{7}\sqrt{70}$ ，還會再向上移動  $\frac{\left(\frac{v}{3}\right)^2}{2g} = \frac{\frac{40}{7}}{20} = \frac{2}{7} \text{ (m)}$ 。

所以 1 kg 物體最高可到達的位置距地面  $3 + 1 + \frac{2}{7} = 4\frac{2}{7} = \frac{30}{7} \approx 4.29 \text{ (m)}$ 。

三、如下圖，一個截面積為  $A$  米<sup>2</sup> 的 U 型管內裝有密度為  $\rho$  公斤/米<sup>3</sup> 的液體，U 型管底部彎曲部分之曲率半徑為  $R$  米，液體在 U 型管直線部分的高度為  $h$  米。當液體的黏滯力可被忽略，將 U 型管稍微傾斜後再回復正立，則管內液體進行類似單擺的簡諧運動。若重力加速度為  $g$  米/秒<sup>2</sup>，試求此簡諧運動的週期為多少秒。(6 分)



【解答】

當一管內的水柱因為傾斜而下降了  $\Delta h$  時，另一管內的水柱會上升  $\Delta h$ ，此時的回復力

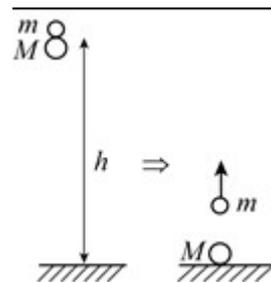
$$F = -\rho \cdot g \cdot L \cdot A = -\rho \cdot g \cdot 2\Delta h \cdot A = -k \cdot \Delta h$$

$$k = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A$$

所以簡諧運動週期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot (\pi R + 2h)}{2 \cdot \rho \cdot g \cdot A}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi R + 2h}{2g}} \text{ (s)}$$

四、如右圖，質量  $m$  的小球緊鄰在質量為  $M$  的大球正上方，兩球同時從高度為  $h$  處自由落下（兩球半徑遠小於  $h$ ）。當  $M$  自地面反彈後，立即與  $m$  發生碰撞後立即靜止。若所有碰撞皆為彈性，碰撞後小球  $m$  鉛直地向上彈飛。



- (a) 試求  $m$  可達的最大高度為多少  $h$ ? (忽略空氣阻力)  
 (b)  $m/M = ?$

【解答】 (a)  $4h$  (b)  $\frac{1}{3}$

a)  $M$  撞擊地面後反彈的速度為  $\sqrt{2gh}$  (向上)， $m$  落下之末速  $\sqrt{2gh}$  (向下)

兩球發生彈性碰撞: (以向上為正)

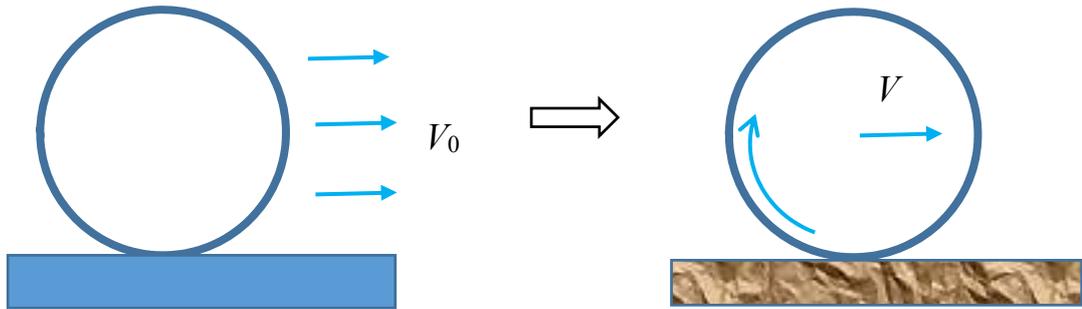
$$M \text{ 碰撞後速度 } v'_M = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh} + \frac{2m}{M+m}(-\sqrt{2gh}) = 0 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{3}$$

$$b) m \text{ 碰撞後末速為 } v'_m = \frac{2M}{M+m}\sqrt{2gh} + \frac{m-M}{M+m}(-\sqrt{2gh}) = \sqrt{8gh}$$

$$\text{由 } m \text{ 力學能守恆: } \frac{1}{2}m(\sqrt{8gh})^2 = mgH \Rightarrow H = 4h$$

五、如圖，一圓環質量  $M$  半徑  $R$ ，環身厚度可忽略。環面鉛直在光滑水平地面以速度  $V_0$  滑動(無滾動)，進入一水平粗糙面(靜摩擦係數為  $\mu_s$ )經過時間  $T$  後形成純滾動(無滑動)。

- 粗糙面之動摩擦係數  $\mu_k$  為何?
- 圓環形成純滾動時，其環心速度量值  $V$  為何?
- 圓環形成純滾動後所受的摩擦力為何?



【解答】 a.  $\frac{v_0}{2gT}$  b.  $\frac{v_0}{2}$  c.  $\mu_s Mg$

Sol: 由  $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\mu_k Mg = M \times \frac{(v-v_0)}{T} \dots(1)$

由  $\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow -\mu_k MgR = MR^2 \times \frac{0 - \frac{v}{R}}{T} \dots(2)$

由(1)、(2)聯立解得:  $\mu_k = \frac{v_0}{2gT}; v = \frac{v_0}{2}$

c. 由於純滾動的物體間無相對滑動，故期間的摩擦力為零