

107 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 6 區複賽物理科筆試試題及參考解

注意:

- 1.請依題號寫入該題答案卷，否則不予給分。
- 2.請勿將答案卷分解，否則以零分計。
- 3.本次測驗試題共五題，正反面皆有題目。

一、有一傾斜角度未知的斜面，一質量為 M 公斤的物體從這個斜面底部出發，沿著斜面以初速 v 米/秒 向上滑動了距離 L 米後，再沿原路徑向下滑到斜面底部出發點時的速率為 $\frac{v}{4}$ 米/秒。則

- (a) 物體與斜面間之動摩擦力為多少牛頓？ (6 分)
- (b) 物體由出發點上滑再下滑至原出發位置，總共經過了多少秒？ (6 分)

【解答】

設物體上滑時的加速度大小為 a_1 ，經過時間為 t_1 ；下滑時的加速度大小為 a_2 ，經過時間為 t_2 。

求加速度大小：

$$\text{上滑時：} v^2 = 2 \cdot a_1 \cdot L, \text{ 得 } a_1 = \frac{v^2}{2L}, \text{ 方向沿斜坡朝下。}$$

$$\text{下滑時：} \left(\frac{v}{4}\right)^2 - 0 = 2 \cdot a_2 \cdot L, \text{ 得 } a_2 = \frac{v^2}{32L}, \text{ 方向沿斜坡朝下。}$$

(a) 考慮摩擦力：

$$\text{上滑時：} M \cdot g \cdot \sin\theta + f_k = M \cdot a_1,$$

$$\text{下滑時：} M \cdot g \cdot \sin\theta - f_k = M \cdot a_2,$$

$$\text{可求出 } f_k = \frac{M}{2} \cdot (a_1 - a_2) = \frac{15}{64} \cdot \frac{Mv^2}{L} \text{ (N)。}$$

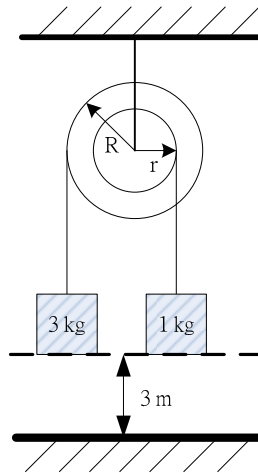
(b) 計算時間：

$$\text{上滑時：} 0 = v - a_1 \cdot t_1, \text{ 得 } t_1 = \frac{v}{a_1} = \frac{2L}{v},$$

$$\text{下滑時：} \frac{v}{4} = 0 + a_2 \cdot t_2, \text{ 得 } t_2 = \frac{v}{4a_2} = \frac{8L}{v},$$

$$\text{總共經過時間} = t_1 + t_2 = \frac{10L}{v} \text{ (s)。}$$

- 二、如下圖，質量 3 kg 與 1 kg 的物體分別以繩子懸吊於一個無摩擦力的輪軸之外圈與內圈。已知輪軸外圈與內圈的半徑比 $R:r=3:1$ 。若輪軸與繩子的質量很小可被忽略，並且重力加速度為 10 m/s^2 。兩物體初始位置距離地面 3 m，並用手維持靜止。當手瞬間放開，將兩物體由靜止狀態釋放，則
- (a) 3 kg 的物體著地瞬間的速率為多少 m/s ？(6 分)
- (b) 1 kg 的物體最高可上升至距地面多少 m ？(6 分)



【解答】

當 3 kg 的物體著地瞬間，其高度下降了 3 m，所以 1 kg 的物體上升了 1 m，距地面 4 m。

若 3 kg 的物體著地瞬間速度大小為 v ，此時 1 kg 的物體向上的速率為 $\frac{v}{3}$ 。

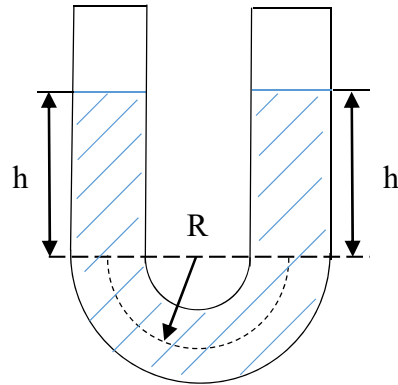
(a) 由力學能守恆， $3 \cdot 10 \cdot 3 + 1 \cdot 10 \cdot 3 = 1 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{v}{3}\right)^2$

可求出 $v = \sqrt{\frac{360}{7}} = 6\sqrt{\frac{10}{7}} = \frac{6}{7}\sqrt{70} \approx 7.17 \text{ (m/s)}$

(b) 此時 1 kg 物體之向上速率為 $\frac{v}{3} = \frac{2}{7}\sqrt{70}$ ，還會再向上移動 $\frac{\left(\frac{v}{3}\right)^2}{2g} = \frac{\frac{40}{7}}{20} = \frac{2}{7} \text{ (m)}$ 。

所以 1 kg 物體最高可到達的位置距地面 $3 + 1 + \frac{2}{7} = 4\frac{2}{7} = \frac{30}{7} \approx 4.29 \text{ (m)}$ 。

三、如下圖，一個截面積為 A 米² 的 U 型管內裝有密度為 ρ 公斤/米³ 的液體，U 型管底部彎曲部分之曲率半徑為 R 米，液體在 U 型管直線部分的高度為 h 米。當液體的黏滯力可被忽略，將 U 型管稍微傾斜後再回復正立，則管內液體進行類似單擺的簡諧運動。若重力加速度為 g 米/秒²，試求此簡諧運動的週期為多少秒。(6 分)



【解答】

當一管內的水柱因為傾斜而下降了 Δh 時，另一管內的水柱會上升 Δh ，此時的回復力

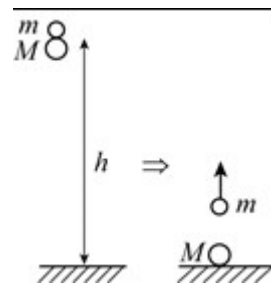
$$F = -\rho \cdot g \cdot L \cdot A = -\rho \cdot g \cdot 2\Delta h \cdot A = -k \cdot \Delta h$$

$$k = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A$$

所以簡諧運動週期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot (\pi R + 2h)}{2 \cdot \rho \cdot g \cdot A}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi R + 2h}{2g}} \text{ (s)}$$

四、如右圖，質量 m 的小球緊鄰在質量為 M 的大球正上方，兩球同時從高度為 h 處自由落下（兩球半徑遠小於 h ）。當 M 自地面反彈後，立即與 m 發生碰撞後立即靜止。若所有碰撞皆為彈性，碰撞後小球 m 鉛直地向上彈飛。



(a) 試求 m 可達的最大高度為多少 h ? (忽略空氣阻力)

(b) $m/M = ?$

【解答】 (a) $4h$ (b) $\frac{1}{3}$

a) M 撞擊地面後反彈的速度為 $\sqrt{2gh}$ (向上)， m 落下之末速 $\sqrt{2gh}$ (向下)

兩球發生彈性碰撞: (以向上為正)

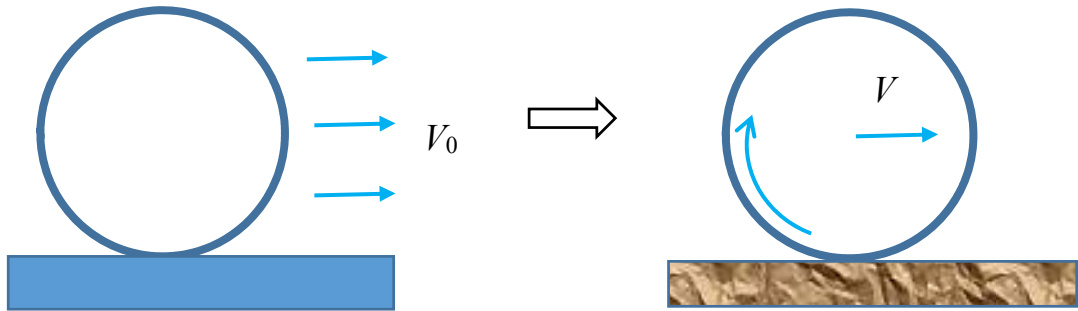
$$M \text{ 碰撞後速度 } v'_M = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh} + \frac{2m}{M+m}(-\sqrt{2gh}) = 0 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{3}$$

$$b) m \text{ 碰撞後末速為 } v'_m = \frac{2M}{M+m}\sqrt{2gh} + \frac{m-M}{M+m}(-\sqrt{2gh}) = \sqrt{8gh}$$

$$\text{由 } m \text{ 力學能守恆: } \frac{1}{2}m(\sqrt{8gh})^2 = mgH \Rightarrow H = 4h$$

五、如圖，一圓環質量 M 半徑 R ，環身厚度可忽略。環面鉛直在光滑水平地面以速度 V_0 滑動(無滾動)，進入一水平粗糙面(靜摩擦係數為 μ_s)經過時間 T 後形成純滾動(無滑動)。

- 粗糙面之動摩擦係數 μ_k 為何?
- 圓環形成純滾動時，其環心速度量值 V 為何?
- 圓環形成純滾動後所受的摩擦力為何?



【解答】 a. $\frac{v_0}{2gT}$ b. $\frac{v_0}{2}$ c. $\mu_s Mg$

Sol: 由 $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\mu_k Mg = M \times \frac{(v-v_0)}{T} \dots(1)$

由 $\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow -\mu_k MgR = MR^2 \times \frac{0 - \frac{v}{R}}{T} \dots(2)$

由(1)、(2)聯立解得: $\mu_k = \frac{v_0}{2gT}; v = \frac{v_0}{2}$

c. 由於純滾動的物體間無相對滑動，故期間的摩擦力為零