107 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄市複賽

物理科筆試試題參考解

《第一題》

假設繩子原始長度為 L、橋面高度 H、最後某甲靜止的高度 h 處，此時繩子長度為 $d = H - h$。假如某甲體重為 m，繩子彈性係數為 k，則

$$mg = k(d - L) \Rightarrow \frac{mg}{k} = d - L \qquad (1)$$

某甲躍下到水面時，速度為 0，設零位面在水面上，則總位能全部轉成繩子的彈力位能

$$mgH = \frac{1}{2}k(H - L)^2 \Rightarrow \frac{mg}{k} = \frac{(H - L)^2}{2H} \qquad (2)$$

比較(1)與(2)得

$$\frac{(H - L)^2}{2H} = H - h - L \Rightarrow H^2 + L^2 = 2H^2 - 2Hh \qquad (3)$$

解 L 得

$$L = \sqrt{H(H - 2h)} = 99 \text{ 公尺} \quad \#$$

另外速度最快時就是加速度為 0 時，也就是經過平衡點時，即高度 h。

一開始躍下瞬間僅有重力位能，無動能及彈力位能，到達平衡點時，有重力位能、動能及彈力位能，所以

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(d - L)^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2gd - g\frac{k}{mg}(d - L)^2$$

$$= 2gd - g\frac{2H}{(H - L)^2}(d - L)^2$$

$$= 2gd - g(d - L) = g(d + L)$$

因此 $$v = \sqrt{g(H - h + L)} = \sqrt{g}\sqrt{H - h + \sqrt{H(H - 2h)}}$$

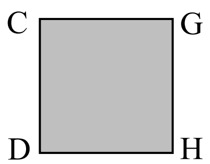
$$= \sqrt{10}\sqrt{101 + 99}$$

$$= 20\sqrt{5} \text{ 公尺/秒} \quad \#$$

《第二題》

因為正立方體是剛體，而且 A 與 D 有相同速度，所以剛體內任意兩點，如果其連線平行於 $\overline{AD}$，則這兩點就具有相同速度。因此

本題只要考慮 CDHG 這個面的點即可。



選擇 D 點靜止的參考座標來看，CDHG 這個面會以順時針或逆時針的方向繞著 D 點轉，所以 H 點對 D 點而言是朝上或朝下運動，但題目給定：對地面觀察者而言，H 點速率是 3v，所以 H 點對 D 點而言速度可能是(a)朝上 4v 或(b)朝下 2v 運動。假設正立方體邊長為 l，水平為 i 方向，垂直為 j 方向，D 點為原點，H 點的座標為$l\hat{\imath}$，C 點的座標為$l\hat{\jmath}$，然後以(a)和(b)兩種狀況討論：

(a) 因為 CDHG 這個正方形繞著 D 轉動，所以 H 相對於 D 的速度為$4\mathrm{v}\hat{\jmath}$，C 相對於 D 的速度為$-4\mathrm{v}\hat{\imath}$，正方形上的點$x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$相對於 D 的速度為$-4\mathrm{v}\frac{y}{l}\hat{\imath}+4\mathrm{v}\frac{x}{l}\hat{\jmath}$，所以點$x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$相對於地面觀察者的速度為$-4\mathrm{v}\frac{y}{l}\hat{\imath}+\left(4\mathrm{v}\frac{x}{l}-\mathrm{v}\right)\hat{\jmath}$，其值為

$$v\sqrt{\left(-4\frac{y}{l}\right)^2+\left(4\frac{x}{l}-1\right)^2},$$

因為$0\le x,y\le l$，所以速率極大值發生在$x=y=l$處（即$\overline{\mathrm{FG}}$線段上所有的點)，其值為 5v。

(b) H 相對於 D 的速度為$-2\mathrm{v}\hat{\jmath}$，C 相對於 D 的速度為$2\mathrm{v}\hat{\imath}$，點$x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$相對於 D 的速度為$2\mathrm{v}\frac{y}{l}\hat{\imath}-2\mathrm{v}\frac{x}{l}\hat{\jmath}$，所以點$x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$相對於地面觀察者的速度為$2\mathrm{v}\frac{y}{l}\hat{\imath}-\left(2\mathrm{v}\frac{x}{l}+\mathrm{v}\right)\hat{\jmath}$，其值為

$$v\sqrt{\left(2\frac{y}{l}\right)^2+\left(2\frac{x}{l}+1\right)^2},$$

因為$0\le x,y\le l$，所以速率極大值發生在$x=y=l$處（即$\overline{\mathrm{FG}}$線段上所有的點)，其值為$\sqrt{13}$v。

《第三題》

$$P_i=Mv$$
$$P_f=(M+\Delta M)(v+\Delta v)-\Delta M\cdot U$$

U 為燃料速率（相對地表）

$$\Delta P=P_f-P_i$$
$$=M\Delta v+\Delta Mv+\Delta M\Delta v-\Delta M\cdot U$$

但$U=(v+\Delta v)-v_{rel}$

$$\therefore\Delta P=M\Delta v+\Delta M\cdot v+\Delta M\Delta v-\Delta M[(v+\Delta v)-v_{rel}]$$
$$=M\Delta v+\Delta M\cdot v_{rel}$$
$$\therefore\frac{\Delta P}{\Delta t}=-Mg$$
$$=\frac{(M\Delta v+\Delta M\cdot v_{rel})}{\Delta t}$$
$$\therefore -Mg-\frac{\Delta M}{\Delta t}v_{rel}=M\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

《第四題》

[提示]

1. 極值時，斜率為 0。

2. $y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$
3. Chain rule

$$d_{AP} = \sqrt{x^2 + d_1^2}$$

$$d_{PB} = \sqrt{(L-x)^2 + d_2^2}$$

$$\therefore t = \frac{d_{AP}}{\frac{c}{n_1}} + \frac{d_{PB}}{\frac{c}{n_2}}$$

$$= \frac{n_1\sqrt{x^2 + d_1^2} + n_2\sqrt{(L-x)^2 + d_2^2}}{c}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2xn_1}{2\sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{2(L-x)n_2}{2\sqrt{(L-x)^2 + d_2^2}} = 0$$

$$\therefore \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \frac{n_2(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + d_2^2}}$$

$$\therefore n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$$