108學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第7區複賽物理科筆試參考解

【第一題】

(a)互繞之向心力由重力提供，對行星m而言其繞質心的軌道半徑

為$\frac{M}{M+m}d \Rightarrow F_c = m\left(\frac{M}{M+m}d\right)\omega^2 = \frac{GMm}{d^2} \Longrightarrow \frac{G(M+m)}{d^3} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$$\therefore \text{週期 } \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(M+m)}}\,(\text{亦可由克卜勒第三定律求出})$$

(b)恆心繞質心的軌道半徑為

$$\frac{m}{m+M}d \Longrightarrow \text{圓運動速率為}\omega \times \left(\frac{m}{M+m}d\right) = \left[\frac{G(M+m)}{d^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{M+m}d\right)$$

$$= \left[\frac{Gm^2}{d(M+m)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

於最大紅藍移位置有最大(小)的徑向速度⇒ 差值為 $2 \times \left[\frac{Gm^2}{d(M+m)}\right]^{\frac{1}{2}}$

(c)由圖可知最大徑向速度約$55m\,/\,sec$，因此速度遠小於光速，故

狹義相對論修正所得的杜卜勒效應和未修正所得的相同：

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{V}{C} \approx -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

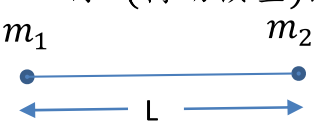
$$\therefore \left|\text{最大的紅移} - \text{最大的藍移}\right| = |2\Delta\lambda| = \left|\lambda\frac{2V}{C}\right| = \lambda\frac{110}{3\times10^8}$$

$$\approx 3.67\times10^{-7}\lambda$$

【第二題】

(a)最易轉動代表使該系統有一固定角加速度時所施的力矩最小：由

τ = Iα 得 I(轉動慣量)愈小，則 α 固定可得力矩 τ 愈小

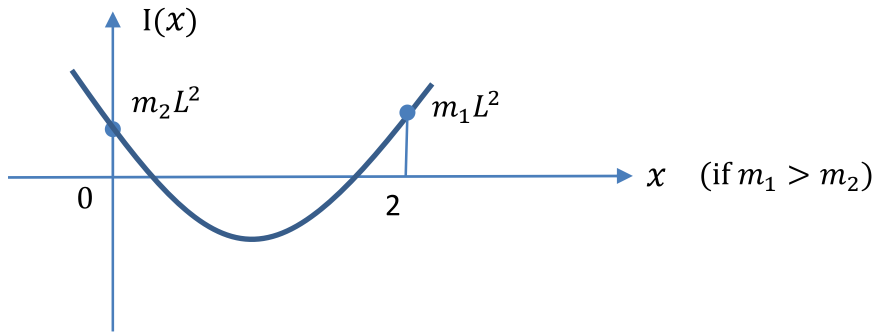
對 

系統而言，桿上任取一點(距m_1為x)

所得的轉動慣量為$m_1x^2 + m_2(L-x)^2 = I(x)$

$I(x)$的最小值可由

$$\begin{cases} (1)\ \frac{dI}{dx} = 0 \ \textit{求出}：2m_1x - 2m_2(L-x) = 0 \Rightarrow x = \frac{m_2}{m_1+m_2}L \\ (2) I(x)\ \textit{為向上凹的拋物線}：(m_1+m_2)x^2 - 2m_2Lx + L^2m_2 = I(x) \end{cases}$$

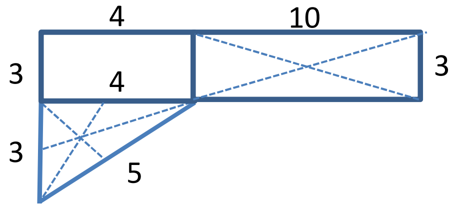


最小值位於$x = \frac{-(-2m_2L)}{2(m_1+m_2)} \Rightarrow x = \frac{m_2L}{m_1+m_2}$此$x$值即為質心位置

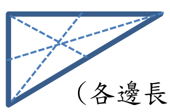
質心位置求法：以m_1為原點⇒ m_2*所在位置為*$x = L$

∴ 質心位置 $= \frac{m_1 \times O + m_2 \times L}{m_1+m_2}$故得出質心位置為$I(x)$最小值的位置

(b)可切割為三塊圖形



直角三角形區塊的重心(質心)

可以作圖法求出：

(各邊長等分線)

設厚度為d：槍管質量為$(10 \times 3 \times d) \times 7.8$

木柄長方形部位質量是$(4 \times 3 \times d) \times 0.7$；

三角形為$\left(\frac{4\times 3\times d}{2}\right)\times 0.7$

槍管部分質心座標為$\left(9，-\frac{3}{2}\right)$；

木柄長方形部分的質心座標為$\left(2，-\frac{3}{2}\right)$；

三角形部分的質心座標為$(\frac{4}{3}，-4)$

$\Rightarrow$ 整體質心座標

$$=\frac{\left(9,\frac{-3}{2}\right)\times(30d)\times 7.8+\left(2,\frac{-3}{2}\right)\times(12d)\times 0.7+\left(\frac{4}{3},-4\right)\times(6d)\times 0.7}{(30d)\times 7.8+12d\times 0.7+6d\times 0.7}$$

$\cong(8.63,-1.54)$

【第三題】(範圍：電學、運動學)

一根質量不計、長度為 l 的輕桿子，其中一個端點 A 連接著質量為 m、電荷為 q 的小球，另一個端點 B 被釘於牆上使得桿子與小球可繞著 B 點旋轉，另有一電荷同為 q 的物體被固定在端點 B 的正上方 l 處牆面上。一開始端點 A 靜置於端點 B 正下方，在對輕桿子施予一微小的擾動後，輕桿子在垂直牆面上做角度很小的擺動，求此擺動的週期(庫倫常數為 k，重力加速度為 g)。

參考解

當桿子從鉛直線擺動θ角時，

(1)小球與上方物體距離 d，利用餘弦定理

$$\mathrm{d}^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cos(180° - \theta) = 2l^2(1 + \cos\theta)$$

所以兩電荷之靜電斥力為

$$F_q = \frac{kq^2}{d^2} = \frac{kq^2}{2l^2(1 + \cos\theta)}$$

(2)小球受到的重力為

$$F_g = \mathrm{mg}$$

(3)小球受到的切線合力為

$$F_t = F_g\sin(\theta) + F_q\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mathrm{mg}\sin(\theta) + \frac{kq^2}{2l^2(1 + \cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(4)合力造成擺動

$$F_t = \frac{4\pi^2 ml\theta}{T^2}$$

(5)當θ角很小時，$\sin\theta \cong \theta,\ \sin\frac{\theta}{2} \cong \frac{\theta}{2}, \cos\theta \cong 1$ ，所以

$$\frac{4\pi^2 ml\theta}{T^2} = \mathrm{mg}\,(\theta) + \frac{kq^2}{2l^2 2}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(6)所以 $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{mg}{mg + \frac{kq^2}{8l^2}}}$

【第四題】(範圍：電學)

兩導體球半徑各為 r 與 $4r$，相距一段很遠的距離。第一次實驗，兩球先各放入電荷 Q，然後以細導線連接，測得導線上最大電流是 I_0。第二次實驗，大球先放入電荷 Q，小球是電中性，然後以細導線連接，此次測得導線上最大電流為多少?

參考解

1st 實驗 連接導線前後電荷守恆，所以

$$Q_{ri} + Q_{4ri} = Q_{rf} + Q_{4rf} = 2Q$$

另外連接一段時間後，兩球電位相同

$$\frac{\mathrm{k}Q_{rf}}{r} = \frac{\mathrm{k}Q_{4rf}}{4r}$$

所以$4Q_{rf} = Q_{4rf}$ ，因此 $Q_{rf} = \frac{2}{5}Q$ ，代表有$\frac{3}{5}Q$電荷流向大球，最大電流 I_0。

2nd 實驗 連接導線前後電荷守恆，所以

$$Q_{ri} + Q_{4ri} = Q_{rf} + Q_{4rf} = Q$$

連接一段時間後，兩球電位相同

$$\frac{\mathrm{k}Q_{rf}}{r} = \frac{\mathrm{k}Q_{4rf}}{4r}$$

所以$4Q_{rf} = Q_{4rf}$，因此 $Q_{rf} = \frac{1}{5}Q$，代表有$\frac{1}{5}Q$電荷流向小球，最大電流 $\frac{1}{3}I_0$。(第一個實驗的電荷流量是第二個實驗的三倍。但是，兩種情況下的電路配置都是相同的，因此電流隨時間變化的數學形式必須相同。因此，第二個實驗的峰值電流是第一個實驗的三分之一。)