108 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽臺灣省第 4 區複賽

物理科筆試試題參考解

《第一題》

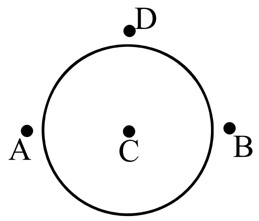
(a)

定性

在 C 來看，A 所受引力較大，故 A 之海水對 C 而言，會向西跑。

而 B 所受引力則較小，故對 C 而言，也會向東跑（相對）。

當然，相對 C 而言，D 的引力還有向下的分力，故 D 會向下跑。



(b)

定量

在任一點 P 之引力為

$$-\frac{GM\hat{r}}{(r+\Delta r)^2}$$

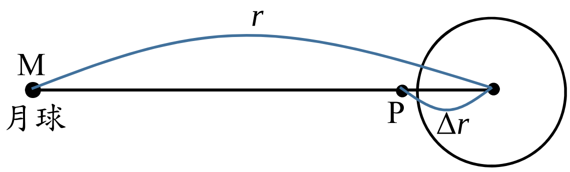
而$\frac{1}{(r+\Delta r)^2} \cong \frac{1}{r^2(1+\frac{\Delta r}{r})^2}$

$$\cong \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)^2 \quad \left(\frac{\Delta r}{r} \ll 1\right)$$

$$\cong \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2r\Delta r}{r}\right)$$

⇒故 C 之力為 $-\frac{GM}{r^2}\hat{r}$

P 者為$-\frac{GM}{r^2}\left(1-\frac{2r\Delta r}{r}\right)\hat{r}$



若 P 在 A　$\Delta r < 0$

$\Delta F = \frac{2GMr\Delta r}{r^3}\hat{r}$ 向西

P 在 B　$\Delta r > 0$

ΔF 向東

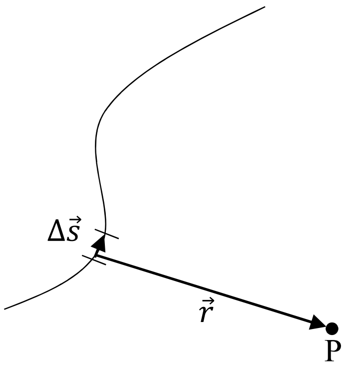
《第二題》

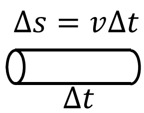
由 Biot-Savart 定律

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{i\Delta\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2|e|}{\Delta t}$$

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{i\Delta s}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2|e|\cdot v}{r^2}$$





《第三題》

(a)

$f = 900 r.p.m = 15 r.p.s \qquad v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.5m}{1/15} = 15\pi$ (m/s)

等加速度公式：$d = \frac{0+15\pi}{2} \times 10 = 75\pi$ (m)

(b)

角加速度 $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{30\pi - 0}{10} = 3\pi$ (rad/s^2)

$\tau = I\alpha = (MR^2)\alpha = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3\pi = \frac{15}{4}\pi$ (N·m)

$\tau = d \times f_k$

$\frac{15}{4}\pi = 0.5 \times (\mu_k \times 200) \qquad \mu_k = \frac{3}{80}\pi$

《第四題》

(a)

最大速度在 m 達到最高點：$\sum E = C$

$4m \cdot g \cdot L = m \cdot g \cdot 2L + \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2v)^2$

$v = \sqrt{\frac{gL}{2}}$，m 的速度 $2v$

m 脫離後做水平拋射運動，射程為$R = 2v \times t = 2\sqrt{\frac{gL}{2}}\left(\sqrt{\frac{2(2L+2L)}{g}}\right) = 4L$

(b)

訂拋出點為原點，則斜向拋射軌跡方程式為 $y = \tan\theta x - \frac{1}{2} g (\frac{x}{v_0 \cos\theta})^2$，通過空間 (d, h)

則 $h = d\tan\theta - \frac{1}{2} g (\frac{d}{v_0 \cos\theta})^2$

整理可得 $v_0 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} g d^2}{\cos^2\theta (d\tan\theta - h)}}$ （表示 v_0 值可由拋出角度 θ 變化控制，取分母最大則有 v_0 最小）

微分分母令值為零求極大：$(\cos^2\theta(d\tan\theta - h))' = d(-\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2h\cos\theta\sin\theta = 0$

$-d\cos 2\theta = h\sin 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = -\frac{d}{h}$