108 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄市複賽

物理科筆試參考解

【第一題】

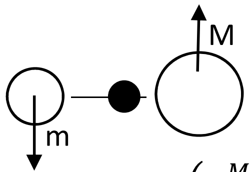
(a)互繞之向心由動力提供，對星體 m 而言其繞共同質心的軌道半

徑為$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M+m}}d$

則$F_c=\mathrm{m}\left(\frac{\mathrm{M}}{M+m}d\right)\omega^2=\frac{GMm}{d^2}\Rightarrow\frac{G(M+m)}{d^3}=\omega^2=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$\therefore$ 週期 $\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\dfrac{d^3}{G(M+m)}}$(*亦可由克卜勒第三定律求出*)

(b)



則相對速率為 $\left(\frac{M}{M+m}d+\frac{m}{M+m}d\right)\omega=\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\sqrt{\frac{G(M+m)}{d^3}}=\sqrt{\frac{G(M+m)}{d}}$

(c)圓軌道運動總力學能(動能+位能)為$-\frac{GMm}{2d}$

互繞後$\Rightarrow-\frac{GMm}{2(d+\Delta d)}$

$\therefore\Delta\mathrm{E}=-\frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{d+\Delta d}-\frac{1}{d}\right)=-\frac{GMm}{2}\left(\frac{-\Delta d}{d(d+\Delta d)}\right)\cong\frac{GMm}{2d^2}\Delta d$

(因$\mathrm{d(d+\Delta d)}\approx\mathrm{d\times d2}$，當 $\mathrm{d}\gg\Delta\mathrm{d}$)

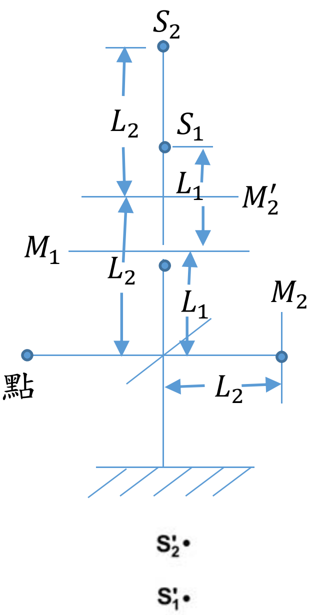
(d)於=0.3 秒時，$V_{(相對)}\cong0.34c$，*相距為* $4.4R_s$

由相對速率=$\mathrm{d}\times\omega\Rightarrow\omega=\frac{0.34c}{4.4R_s}=\frac{2\pi}{T}$

$$\therefore\mathrm{T}=2\pi\left(\frac{4.4R_s}{0.34c}\right)\approx81.32\frac{R_s}{c}$$

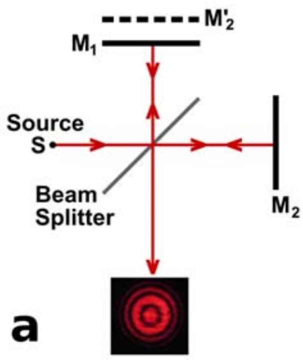
【第二題】

(a)設$L_2 > L_1$，鏡面影像可視為於鏡面後等距的光源發出的，分光鏡所造成的轉向亦可置於同軸上(如右圖所示)由於光源S_1及S_2在同軸上，故對屏幕上對軸心點等距處有相同的光程差，所以成像具有圓(對軸心點為圓心所構成的圓)對稱。



(b)$\lambda = 589\text{nm}, L_1 = 5cm, M_1$距屏幕為 10cm

$\Longrightarrow S_1$距屏幕為 15cm



由圖得第一圈暗紋直徑約 0.75cm

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{0.75}{2}\Big/15 = 0.025 \approx \sin\theta \approx \theta$

S_1和S_2相距為(依據(a)內的圖示)$|L_2 - L_1| \times 2$

故於第一暗紋的光程差可由

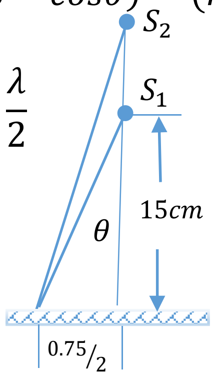
$|S_1 - S_2| cos\theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$得出(m 為某正整數或零)

第一暗紋位於

$$m = m' - 1 \Longrightarrow |S_1 - S_2|(cos0 - cos\theta) = (m' - m - \frac{1}{2})\lambda$$

$$\therefore |S_1 - S_2|\left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right) \cong \frac{\lambda}{2}$$

$$\Longrightarrow |S_1 - S_2|\frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2}\lambda$$



$\therefore |S_1 - S_2| = 2|L_2 - L_1| = \frac{\lambda}{\theta^2} = \frac{589\times10^{-7}(cm)}{2\times(0.025)^2}$

$$\therefore |L_2 - L_1| = \frac{589 \times 10^{-7}(cm)}{2 \times (0.025)^2} \simeq 4.71 \times 10^{-2}(cm)$$

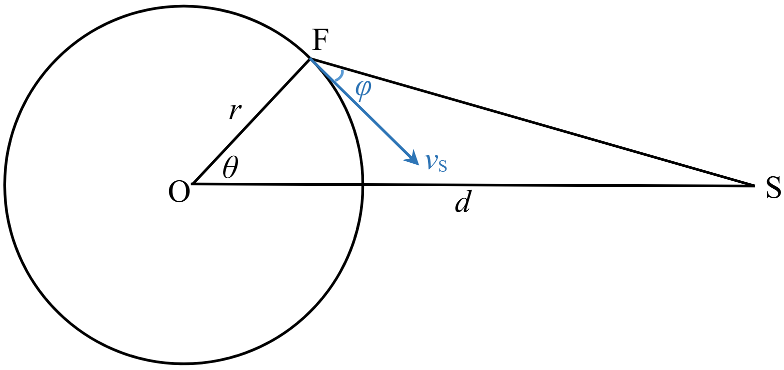
(c)對第一暗紋的條件相同，故當$|S_1 - S_2|$增加時，cosθ值減小此對

應到θ增加，即干涉條紋變大。

【第三題】

(1)若已知聲速為 v，當聲源（音叉 F）以速度 v_S 向著觀察者（偵測器 S）與其連線夾 φ 角運動時，觀察者接收到的頻率 f' 與聲源的頻率 f 滿足：

$$f' = \frac{v}{v - v_S \cos\varphi} f$$



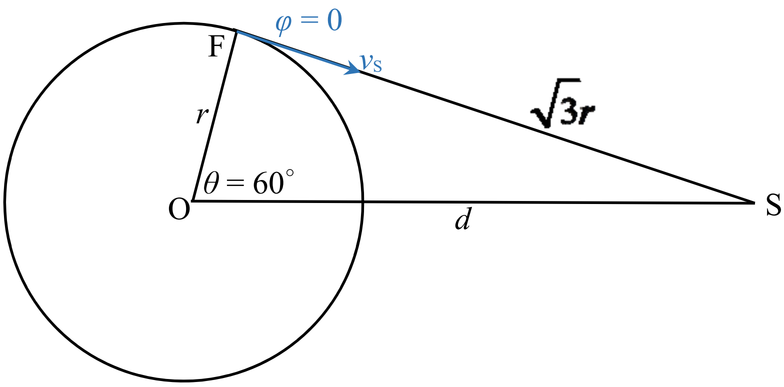
當 $\varphi = 0$ 時， f' 有最大值

$$\Rightarrow f'_{\max} = \frac{v}{v - v_S} f = \frac{v}{v - \omega r} f$$

而 $\varphi = 0$ 時，表 SF 與音叉運動之圓軌跡相切，圓半徑為 10.0 m、偵測器 S 距圓心 O 的距離為 20.0 m，知 $\theta = 60^\circ$ 。

故當 $\theta = 60^\circ - \omega\Delta t = 60^\circ - \omega \times \dfrac{\sqrt{3}r}{v} = 45^\circ$ 時，

偵測器接收到最大頻率為 $f'_{\max} = \dfrac{v}{v - \omega r} f = \dfrac{360}{360 - \sqrt{3}\pi \times 10.0} \times 440 = 518$ Hz。



(2)設系外行星飛馬座 51b 的近日距為 r_1、遠日距為 r_2，橢圓軌道的半長軸長為 a、半短軸長為 b，因此可知：焦距為 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ ， $r_1=a-c$，$r_2=a+c$，$r_1+r_2=2a$。

因兩星體間的萬有引力為連心力，所以角動量守恆：$L=\mu r^2\omega=\text{const.}$

$\Rightarrow \omega=\dfrac{L}{\mu r^2}$

又雙星間的萬有引力為保守向量場，所以力學能守恆：

$$\frac{1}{2}\mu r_1^{\ 2}\omega_1^{\ 2}-\frac{GMm}{r_1}=\frac{1}{2}\mu r_2^{\ 2}\omega_2^{\ 2}-\frac{GMm}{r_2}$$

代入 ω 得：$\dfrac{L^2}{2\mu r_1^{\ 2}}-\dfrac{GMm}{r_1}=\dfrac{L^2}{2\mu r_2^{\ 2}}-\dfrac{GMm}{r_2}$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r_1^{\ 2}}-\frac{1}{r_2^{\ 2}}\right)=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

則

$$L^2=2\mu GMm\left(\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\right)=2\mu GMm\left(\frac{a^2-c^2}{2a}\right)=2\mu GMm\frac{b^2}{2a}$$

又由克卜勒行星第二運動定律知，面積速率 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}r^2\omega=\text{const.}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\omega=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right)=\frac{L}{2\mu}=\text{const.}$$

故可知雙星運動的繞行週期為

$$T=\frac{\pi ab}{\frac{1}{2}r^2\omega}=\frac{\pi ab}{\frac{L}{2\mu}}=2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{GMm}}=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\left(M+m\right)}}$$

(3)設地球質量為 m_{E}、太陽質量為 M_{S}、地球公轉週期為 T_{E}、日地平均距離為 R_{E}

承(2)，$T_{\mathrm{E}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R_{\mathrm{E}}^{\ 3}}{G\left(M_{\mathrm{S}}+m_{\mathrm{E}}\right)}}$ $\quad\Rightarrow G=\dfrac{4\pi^2R_{\mathrm{E}}^{\ 3}}{M_{\mathrm{S}}T_{\mathrm{E}}^{\ 2}}$

由(2)答案可知：$M+m=\dfrac{4\pi^2 a^3}{GT^2}=\dfrac{4\pi^2 a^3}{\dfrac{4\pi^2 {R_\mathrm{E}}^3}{M_\mathrm{S}{T_\mathrm{E}}^2}T^2}=\left(\dfrac{a}{1\mathrm{A.U.}}\right)^3\left(\dfrac{1\mathrm{year}}{T}\right)^2 M_\mathrm{S}$

$\Rightarrow M+m=\left(\dfrac{0.05}{1}\right)^3\left(\dfrac{365}{5}\right)^2 M_\mathrm{S}=0.67M_\mathrm{S}$

設母恆星與飛馬座 51b 至其系統質心的距離分別是 R_1、R_2，

$\Rightarrow \dfrac{M}{m}=\dfrac{R_2}{R_1}=2500$

故得：系外行星飛馬座 51b 之質量 $m=0.67M_\mathrm{S}\times\dfrac{1}{2501}=2.7\times10^{-4}M_\mathrm{S}$ 。

【第四題】

(1)設質子的質量為 m、電量為 e，質子離開迴旋加速器時速度大小為 v，在 t 時間內從迴旋加速器輸出的質子數為 N，則輸出時的平均功率與等效電流分別為

$$P=\frac{N\cdot\frac{1}{2}mv^2}{t}$$

$$i=\frac{Ne}{t}$$

質子在 D 形盒中做等速率圓周運動時，勞倫茲力提供其向心力來源：

$$evB=m\frac{v^2}{R}$$

質子在 D 形盒中做等速率圓周運動之週期為

$$T=\frac{2\pi R}{v}$$

上述週期必須等於交流電源的週期，

$$T=\frac{1}{f}$$

聯立上述各式，可得質子束從迴旋加速器輸出時的等效電流為

$$i=\frac{P}{\pi BfR^2}$$

(2)設質子的質量為 m、電量為 e，兩金屬盒 D_1、D_2 之間的電壓為 V。任取質子在同一盒中做等速率圓周運動過程兩相鄰的軌跡，其半徑分別為 r_k、r_{k+1} (因 $r=\frac{mv}{eB}\propto v$ ，$r_k<r_{k+1}$)，其運動速度大小分別為 v_k、v_{k+1}，兩次穿越金屬盒的間隙，得到了兩次加速。

由力學能守恆可知：

$$2eV=\frac{1}{2}mv_{k+1}^2-\frac{1}{2}mv_k^2$$

質子在 D 形盒中做等速率圓周運動時，勞倫茲力提供其向心力來源，分別可得：

$$r_k=\frac{mv_k}{eB}\ ,\ r_{k+1}=\frac{mv_{k+1}}{eB}$$

代入力學能守恆式可得：

$$2eV=\frac{e^2B^2}{2m}\left(r_{k+1}^2-r_k^2\right)$$

因此在同一盒中相鄰軌跡的間距 Δr_k 為

$$\Delta r_k = r_{k+1} - r_k = \frac{4mV}{eB^2\left(r_{k+1} + r_k\right)}$$

因 m、q、V、B 為常量，同理，下一組的相鄰軌跡的間距 Δr_{k+1} 為

$$\Delta r_{k+1} = r_{k+2} - r_{k+1} = \frac{4mV}{eB^2\left(r_{k+2} + r_{k+1}\right)}$$

由於 $r_k < r_{k+2}$，因此 $\Delta r_{k+1} < \Delta r_k$

故，隨著軌跡半徑 r 的增大，在同一盒中相鄰軌跡的間距 Δr 是逐次減小的。