

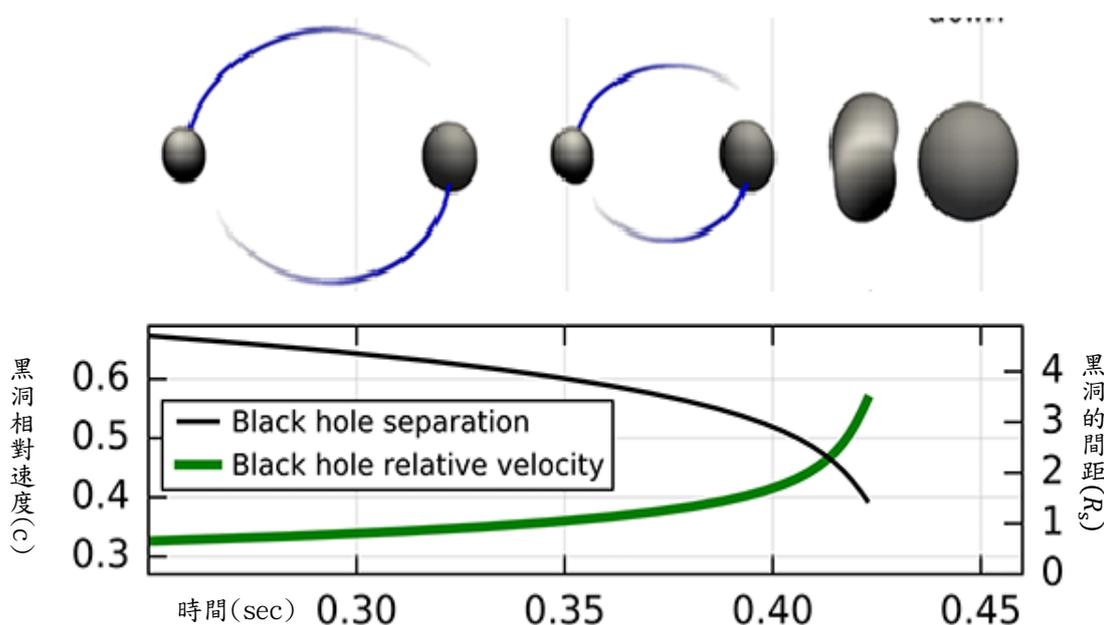
# 108 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄市複賽 物理科筆試試題

- 說明：(1) 請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。  
 (2) 本試題卷共四題，請依題號在答案卷上指定位置作答，  
 試題卷需隨答案卷繳回。

## 【第一題】

黑洞合併所造成的重力波是 2016 年位於美國的干涉儀重力波觀測站 (LIGO) 所觀測到的天文現象，合併前兩黑洞會互繞，並於過程中損失能量而逐漸減小互繞的距離。以下試以雙星運動討論互繞半徑隨時間減小之現象：

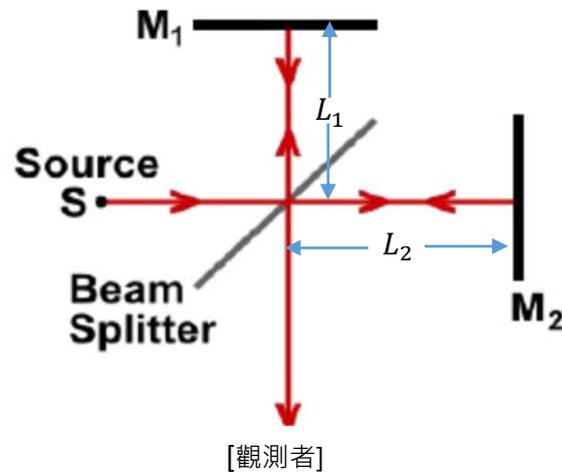
- (a) 設兩星體質量各為  $M$  和  $m$ ，以間距  $d$  彼此對此兩星系的質心以圓軌道互繞，試求互繞週期？(重力常數為  $G$ ，以  $G, m, M, d$  表示)
- (b) 承(a)，求  $M$  和  $m$  的相對速率。(以  $G, m, M, d$  表示)
- (c) 繞一圈後互繞的間距改變為  $d + \Delta d$ ，已知  $|\Delta d| \ll d$ ，請證明互繞的力學能減少時  $\Delta d < 0$ 。
- (d) 圖為黑洞合併互繞的實驗曲線，試求於實驗圖上橫軸 0.3 秒時此雙星系統互繞的週期(以光速  $c$  及圖上的長度單位  $R_s$  表示)



(圖擷取自: PRL 106, 061102 (2016))

【第二題】

LIGO 是以干涉儀進行重力波的觀測，其中一種邁克生干涉儀的設計圖示如下：



(圖擷取自: [https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson\\_interferometer](https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson_interferometer))

中間的分光鏡讓一半的光沿著  $L_1$  長的路徑遇到鏡面  $M_1$  後反射，另一半沿著  $L_2$  長的路徑遇到鏡面  $M_2$  後反射，對一單色光源經此分光鏡所得的兩路反射光於觀測者處疊加形成干涉條紋如下：



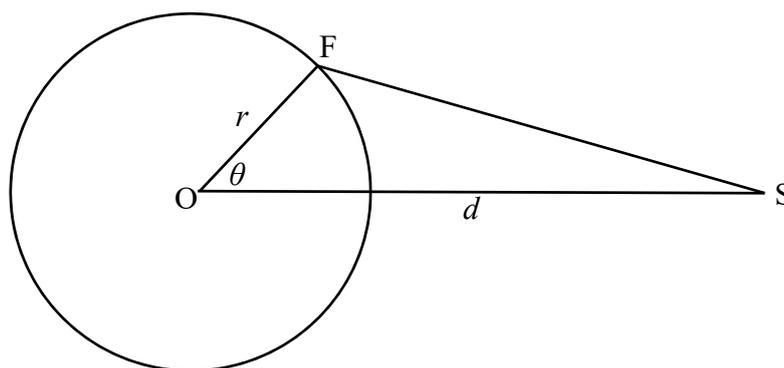
(圖擷取自: [https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson\\_interferometer](https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson_interferometer))

- (a) 請說明(可以繪圖輔助解釋)為何觀測所得的干涉條紋為圓形。
- (b) 於上圖實驗中光源的波長為  $589\text{nm}$ ， $L_1=5\text{cm}$ ，鏡面  $M_1$  距離觀測屏幕為  $10\text{cm}$ ，試估算  $|L_2-L_1|$  值為多少？(於此計算中可能會用到  $\sin(\theta)\cong\tan(\theta)\cong\theta$  及  $\cos(\theta)\cong 1 - \theta^2/2$  當  $\theta \rightarrow 0$ ) (提示：以尺量上圖繞射條文間距)
- (c) 想像一重力波造成某一時間點的  $|L_2-L_1|$  值突然增加，則該瞬間干涉條紋會如何變化？請說明理由支持你的答案

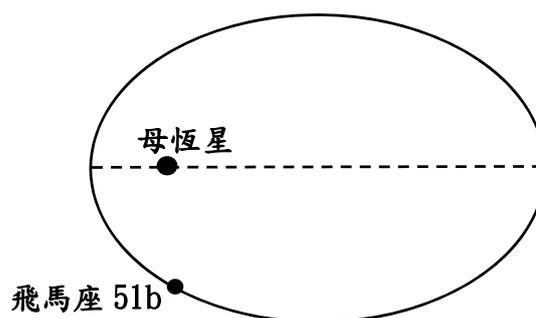
【第三題】

2019 年諾貝爾物理學獎頒發給皮布爾斯(James Peebles)、馬約爾(Michel Mayor)以及奎洛茲(Didier Queloz)以表彰他們對天文物理發展的卓越貢獻，其中馬約爾與奎洛茲得獎的原因是他們發現了第一顆太陽系外行星「飛馬座 51b」。透過徑向速度法，利用都卜勒效應分析恆星吸收光譜的紅移、藍移變化週期，進而推估恆星身旁行星的存在。

- (1)光的都卜勒效應需要利用相對論進行討論，但我們可以先研究非相對論性的聲波都卜勒效應，也不失我們對物理現象理解的概念。現考慮一頻率為 440 Hz 的音叉 F 作順時針等速率圓周運動，圓半徑為 10.0 m、角速度為  $\sqrt{3}\pi$  rad/s，空氣中的聲速為 360 m/s，靜止的偵測器 S 與音叉作等速率圓周運動的圓周共平面，距圓心 O 的距離為 20.0 m。設 OS 與 OF 的夾角為  $\theta$ ，則當偵測器接收到的聲波頻率為最大時，該時刻的  $\theta$  為多少？且該最大頻率為多少？[5 分]



- (2)系外行星「飛馬座 51b」與其母恆星可以被視為一個雙星系統。雙星系統僅受到彼此間的萬有引力的作用，外力影響極小而給予忽略。設飛馬座 51b 與其母恆星的質量分別為  $m$  與  $M$ ，理論上雙星運動可以簡化成單一質點的運動，即以母恆星為參考點，



系外行星飛馬座 51b 視為以減縮質量  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$  相對於該參考點運動，其軌跡為一橢圓。設已知萬有引力常數  $G$ ，試以其質量( $m$ 、 $M$ )與橢圓之半長軸  $a$ ，表示雙星運動的繞行週期  $T$ 。[5 分]

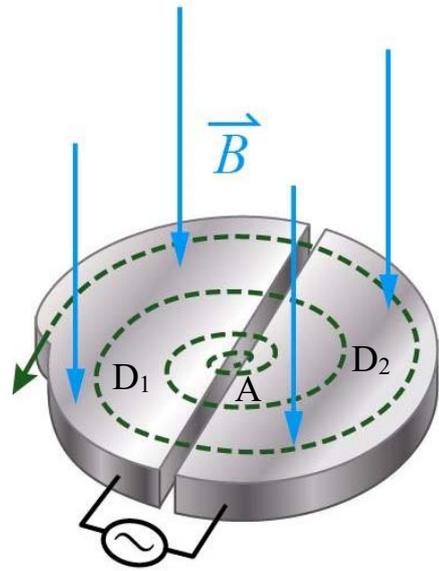
(註：橢圓面積為  $\pi ab$ ，其中  $a$  為半長軸長、 $b$  為半短軸長)

(3)由於雙星系統所受的外力可以忽略，其質心做等速度運動。經過長期對飛馬座 51b 及其母恆星的觀測，可知飛馬座 51b 公轉橢圓之半長軸長約 0.05 A.U.，並發現其雙星系統質心的運動軌跡大致為一直線，質心到兩星體的距離比為 2500，並經由都卜勒效應分析母恆星吸收光譜的紅移、藍移變化週期知兩星環繞週期約為 5 天，試以太陽質量  $M_S$  表示出飛馬座 51b 的質量  $m$ 。[5 分]

(註：配合(2)之結果，萬有引力常數  $G$  可用地球繞太陽之公轉週期「1 年」、地球與太陽之平均距離「1 A.U.」和太陽質量  $M_S$  表示)

#### 【第四題】

迴旋加速器是美國物理學家勞倫斯(Ernest Lawrence)於 1930 年代初所發明的，在核物理領域有著相當廣泛的應用，大大地推動了現代科學技術的發展。迴旋加速器的原理如右圖所示： $D_1$  和  $D_2$  是兩個中空的半圓金屬盒，它們接在電壓一定、頻率為  $f$  的交流電源上， $D_1$ 、 $D_2$  置於與盒面垂直的均勻磁場  $\vec{B}$  中，位於  $D_1$  圓心處的質子源 A 能不斷產生質子(初速度可忽略，重力不計)，質子在兩盒之間被交變電場加速，加速後在磁場區內受勞倫茲力進行等速率圓周運動。



- (1)若質子束從迴旋加速器輸出時的平均功率為  $P$ ，試將輸出時質子束的等效電流  $i$  以平均功率  $P$ 、均強磁場  $B$ 、半徑  $R$ 、交流電源頻率  $f$  表示(忽略質子在電場中運動的時間，且質子的最大速度遠小於光速  $c$ ) [5 分]
- (2)試依據迴旋加速器的工作原理進行推論，說明質子在迴旋加速器中運動時，隨著軌跡半徑  $r$  的增大，在同一盒中相鄰軌跡的間距  $\Delta r$  是增大、減小或不變？ [10 分]