

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 4 區複賽物理科實驗試題第一題  
參考解

### 一、實驗設計之理論基礎

#### 第一部分：

直尺震盪可視為一維簡諧震盪，其運動方程可寫為

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

其中  $\beta$  為阻尼係數，當阻尼係數很小時，可視為輕阻尼簡諧運動(light-damped oscillation)。簡諧運動的單擺之週期  $T$  與擺長  $l$  之關係為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

所以只要求出  $T^2$  與  $L$  之正比關係即可以確認簡諧運動

第二部分：當此系統受磁力作用下，測量震盪頻率  $f$  和磁鐵間距離  $d$  的關係。此問題為原子力顯微鏡的原理，外力是隨著距離改變，所以外力來源為兩個磁偶極所造成的磁場，已知兩個磁偶極所產生的位能為[1]

$$V_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{e}_r)(\vec{m}_2 \cdot \hat{e}_r)}{r^3}. \quad (1)$$

所以產生的磁力為  $F = -\nabla V \propto r^{-4}$ ，磁力將會與距離的-4 次方成正比

在  $Q \gg 1$ 、 $\omega_R \approx \omega_0$ ，且外力對位置的變化量遠小於探針的等效彈性係數(即  $k_{ext} \ll k_e$ ) 等假設下，震盪頻率的變化量將會因所受的外力而呈線性改變[2]

$$\Delta\omega_0 \cong -\frac{\omega_0}{2k_e} F'_{ext}$$

所以在此實驗中，震盪頻率變化將會與距離的-4 次方成正比， $\Delta f \approx Ar^{-4}$ ，取了雙對數之後將可以得到

$$\log(f_o - f) = a - 4 \cdot \log d$$

[參考資料]

1. Jiakuan Wang, Hui Dong, and Sheng-Wen Li, The magnetic dipole-dipole interaction induced by electromagnetic field,
2. 林明彥、張嘉升、黎文龍，原子力顯微儀的原理（下），科儀新知第二十七卷第三期 94.12

### 二、實驗裝置圖與步驟

### 第一部分：直尺震盪是否為簡諧運動？

1. 利用兩直角夾將直尺水平固定在支架上（如下圖 2-1 所示），並記錄固定位置到末端位置之長度  $L$ 。
2. 下壓直尺末端後放開，使其自由震盪並計時，紀錄直尺完整來回震盪的次數及所花的時間。（建議讓直尺震盪多次，以減少反應誤差。）
3. 重複上面第 2 步驟，多次測量。
4. 改變長度  $L$ （操縱變因），重複上面步驟 2～步驟 4。
5. 由以上步驟所得之測量結果，整理出不同長度  $L$  對應的直尺震盪週期  $T$ 。
6. 利用長度  $L$  及震盪週期  $T$  來作圖，分析兩者間之關係是否符合理論上的預測。（可用長度  $L$  為橫軸、週期  $T$  的平方為縱軸，看是否呈線性關係。）

### 第二部分：當此系統受磁力作用下，測量震盪頻率 $f$ 和磁鐵間距離 $d$ 的關係。

1. 利用兩直角夾將黏牢磁鐵的直尺水平固定在支架上（如下圖 2-1 所示），並記錄固定位置到末端位置之長度  $L$ 。
2. 下壓直尺末端後放開，使其自由震盪並計時，紀錄直尺完整來回震盪的次數及所花的時間。（建議讓直尺震盪多次，以減少反應誤差。）
3. 重複上面第 2 步驟，多次測量。
4. 在第一塊磁鐵正下方安置第二塊磁鐵，紀錄兩磁鐵間距離  $d$ （如下圖 2-2 所示）。
5. 固定長度  $L$ （控制變因），改變不同間距離  $d$ （操縱變因），重複上面步驟 2～步驟 3。
6. 由以上步驟所得之測量結果，整理出不同距離  $d$  對應的直尺震盪頻率  $f$ 。
7. 將距離  $d$  取對數、對應頻率變化值  $\Delta f$  取對數（放置第二塊磁鐵前的頻率  $f_0$  - 安置第二塊磁鐵後的頻率  $f_d$ ）。
8. 將上面第 7 步驟的結果做圖並分析。

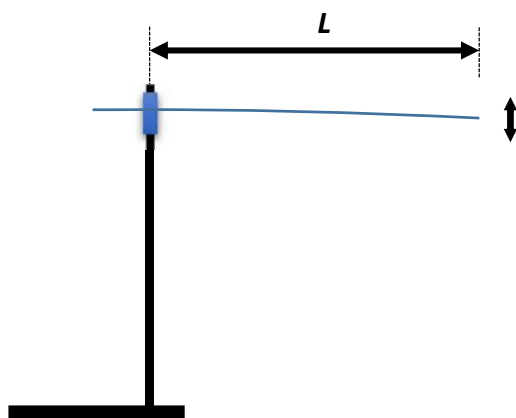


圖 2-1

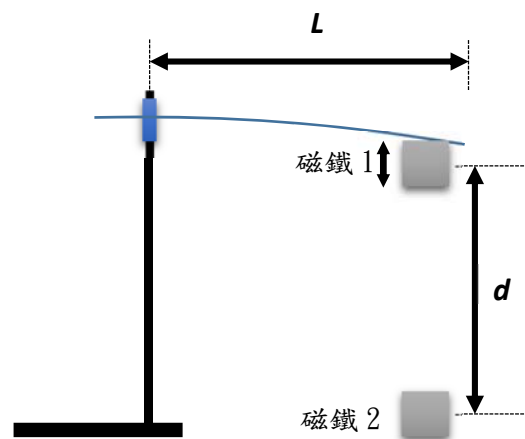


圖 2-2

### 三、數據紀錄與分析

#### 第一部分：直尺震盪是否為簡諧運動？

表 3-1 長度 L、震盪週期 T 及震盪週期 T 的平方

L (cm)	平均 T (s)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )
21.00	0.30338	0.09204
23.00	0.34572	0.11952
25.00	0.38786	0.15043
27.00	0.43332	0.18777
29.00	0.47792	0.22840

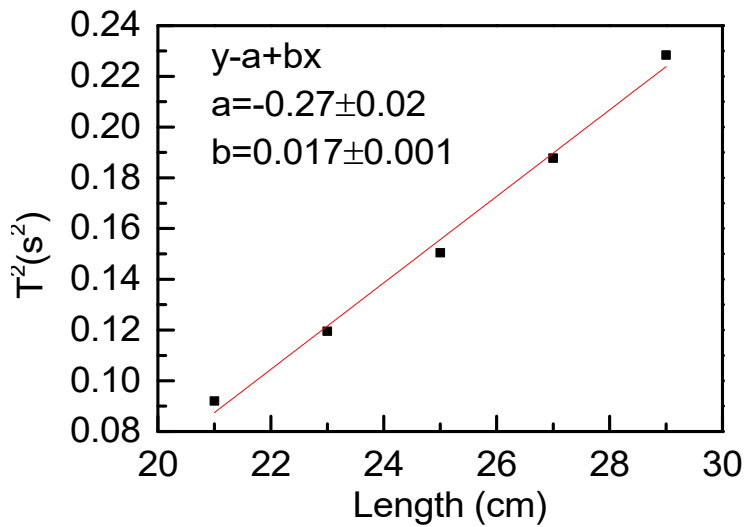


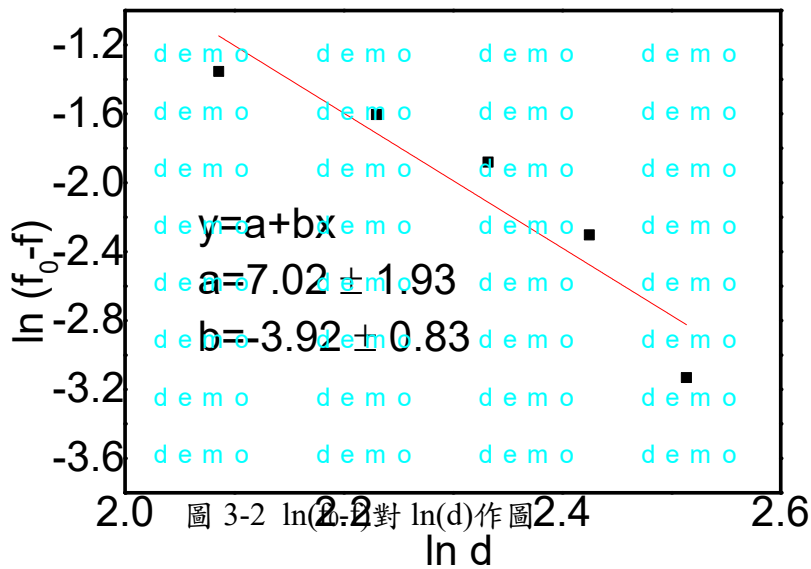
圖 3-1 震盪週期 T 的平方對長度 L 作圖

#### 第二部分：當此系統受磁力作用下，測量震盪頻率 f 和磁鐵間距離 d 的關係。

表 3-2 兩磁鐵距離 d、震盪頻率 f、頻率相減值  $\Delta f$  及 d 和  $\Delta f$  取對數後的數值

L = 25.00 cm、 $f_0 = 2.57825$ (Hz)					
d(cm)	平均 T(s)	f(Hz)	$\Delta f$	ln(d)	ln( $\Delta f$ )
8.05	0.43104	2.31997	0.25828	2.08567	-1.35371
9.30	0.42066	2.37722	0.20103	2.23001	-1.60429
10.30	0.41226	2.42565	0.1526	2.33214	-1.87996
11.30	0.40350	2.47831	0.09994	2.42480	-2.30323
12.35	0.39454	2.53460	0.04365	2.51366	-3.13149

註： $\Delta f = f_0 - f$



#### 四、結果與討論

結果：

1. 由圖 3-1 回歸分析可知， $T^2$  正比於  $L$ ，符合理論上單擺之週期  $T$  與擺長  $L$  之關係，故直尺震盪為簡諧運動。
2. 由圖 3-2 回歸分析可得到  $n = -3.92$ 。

討論：

1. 磁鐵磁性很強，操作時須小心夾手。
2. 平移挪開磁鐵比垂直拔開磁鐵容易。
3. 震盪幅度不能太大是因為會失去簡諧震盪的近似特性。
4. 磁鐵距離  $d$  不能過小，是為了避免實驗設計與理論假設不符，並防止磁鐵相吸。
5. 直角夾夾直尺在水平方向上並不牢固，容易有偏轉的情形，一邊做實驗須一邊留意。
6.  $\log$  雙對數圖若成線性關係，則  $\ln$  雙對數圖也必成線性關係。

令  $x$  和  $y$  之間的關係為：

$$y = kx^n$$

則左式和右式分別取對數後：

$$\log(y) = \log(kx^n)$$

$$\log(y) = n \cdot \log(kx)$$

$$\log(y) = n \cdot \log(k) + n \cdot \log(x)$$

$$\ln(y) = \ln(kx^n)$$

$$\ln(y) = n \cdot \ln(kx)$$

$$\ln(y) = n \cdot \ln(k) + n \cdot \ln(x)$$

皆可對應題目關係式：

$$\log(f_o - f) = a + n \cdot \log d$$

7. 關於受到磁力影響頻率改變實驗，因為要得到  $n=-4$  這個理論值必須遵守近似條件，但是本系統的長尺與磁鐵的等效彈性係數( $k_e$ )不一定會遠大於外力對位置的變化量( $k_{ext}$ )，所以在實驗結果上不一定可以得到正確的  $n$  值。但是其實只要有正確完成實驗與報告，將不影響評分。