

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
台灣省第四區複賽物理科筆試參考解

[第一題]

一、如下圖所示，一個質量 2.00 kg 的圓環被扣在一根表面光滑的固定桿子上，進行無摩擦的滑動。一伸長的彈簧與圓環相連且其另一端固定於 P 點。假設桿子與彈簧均維持在同一水平面上，彈簧的質量可以忽略，且彈簧的彈性係數為 200.0 N/m。將圓環於 A 點保持靜止後釋放，並測得圓環在通過 B 點時的移動速率為 1.00 m/s，試求

- (a) 彈簧未受力時的長度 (6 分)
(b) 圓環經過 C 點時的移動速率 (6 分)

參考解：

(a) 由機械能守恆，可得

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}k(L_A - L)^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k(L_B - L)^2;$$

其中 m 為圓環質量， k 為彈簧彈性係數， v_A 與 v_B 分別為圓環在 A 點與 B 點時的移動速率， L_A 、 L_B 與 L 分別為彈簧在 A 點、B 點與未受力時的長度。

因為 $v_A = 0$ ，由此可得

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}[(L_A - L)^2 - (L_B - L)^2]}^{1/2} = 1.00,$$

代入 $m=2.00$ 、 $k=200.0$ 、 $L_A=0.20$ 、 $L_B=0.12$ ，可解出 $L=0.0975$ (m) = **9.75 (cm)**。

(b) 由

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}k(L_A - L)^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}k(L_C - L)^2$$

代入 $m=2.00$ 、 $k=200.0$ 、 $L_A=0.20$ 、 $L_C=0.15$ ，可解出

$$v_C = \sqrt{\frac{k}{m}[(L_A - L)^2 - (L_C - L)^2]}^{1/2} = \mathbf{0.88 \text{ (m/s)}}。$$

二、如下圖所示，一收音器與一個單一頻率發音源分別以 10.0 m/s 與 20.0 m/s，沿著與牆面垂直的方向，在同一直線上移動。若收音器測得的拍頻為 18.0 拍/s，且聲速為 340.0 m/s，

- (a) 試求發音源所發出的聲音頻率 (6 分)
(b) 若收音器開始朝相反方向以 10.0 m/s 速率移動，試求此狀況下收音器測得的拍頻 (6 分)

參考解：

(a) 設 f 為發音源發出的聲音頻率， v 、 v_s 與 v_d 分別為聲速、發音源移動速率與收音器移動速率。

收音器偵測到直接來自發音源聲波的頻率

$$f_1' = f \cdot \frac{v - v_d}{v - v_s}$$

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
台灣省第四區複賽物理科筆試參考解

[第二題]

收音器偵測到經過牆面反射聲波的頻率

$$f_2' = f \cdot \frac{v - v_d}{v + v_s}$$

$$\text{拍頻} = \Delta f' = f_1' - f_2' = f \cdot \left(\frac{v - v_d}{v - v_s} - \frac{v - v_d}{v + v_s} \right) = f \cdot (v - v_d) \cdot \frac{2v_s}{v^2 - v_s^2} = 18.0$$

可解出 $f = 157.1 \text{ (1/s)}$

(b) 收音器偵測到直接來自發音源聲波的頻率

$$f_1'' = f \cdot \frac{v + v_d}{v - v_s}$$

收音器偵測到經過牆面反射聲波的頻率

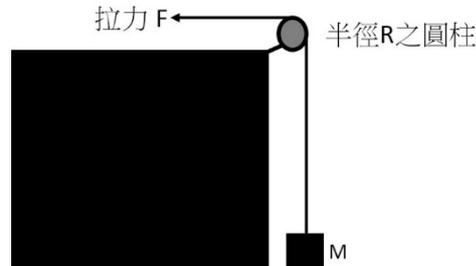
$$f_2'' = f \cdot \frac{v + v_d}{v + v_s}$$

$$\text{可解出拍頻 } \Delta f'' = f_1'' - f_2'' = f \left(\frac{v + v_d}{v - v_s} - \frac{v + v_d}{v + v_s} \right) = f(v + v_d) \frac{2v_s}{v^2 - v_s^2} = 19.1 \text{ (拍/s)}$$

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
台灣省第四區複賽物理科筆試參考解

[第三題]

1. (12%) 小明站在高臺上,嘗試透過固定圓柱 R, 施加水平方向拉力 F 以吊起重物 M, 若圓柱與拉繩之間的靜摩擦係數為 μ , 請問小明最少需施力多少才能將此重物 M 拉起?



參考解:

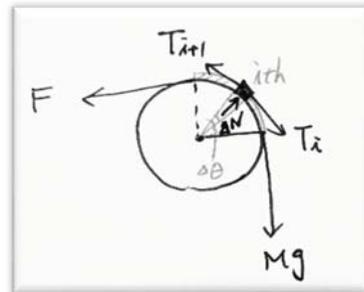
將拉繩分成 n 小段, 考慮第 i 小段拉繩兩端受力:

(1)切線方向合力:

$$T_{i+1} \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = T_i \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + \mu\Delta N, \text{ where } \Delta\theta = \frac{\pi/2}{n}$$

$$\Rightarrow \Delta T = T_{i+1} - T_i \cong \mu\Delta N, (\because \Delta\theta \sim 0,$$

$$\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \sim 1) \dots\dots\dots(1)$$



(2)正向方向合力:

$$(T_i + \Delta T) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + T_i \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \Delta N$$

$$\Rightarrow T_i \Delta\theta \cong \Delta N, (\because \Delta\theta \sim 0, \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \sim \frac{\Delta\theta}{2}) \dots\dots\dots(2)$$

式(2)代入(1)中可得: $\Delta T \cong \mu\Delta N = \mu T_i \Delta\theta$

$$\Rightarrow T_{i+1} = T_i + \Delta T = T_i(1 + \mu\Delta\theta)$$

$$\therefore T_n = T_0(1 + \mu\Delta\theta)^n = T_0\left(1 + \mu\frac{\pi/2}{n}\right)^n$$

因此要將 M 拉起所需最小力 F:

$$F \geq \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \mu\frac{\pi/2}{n}\right)^n \text{ (得到此式即可給滿分)}$$

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
台灣省第四區複賽物理科筆試參考解

因為 $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$, $T_0 = Mg$

所以 $\mathbf{F} \geq \mathbf{Mge}^{\frac{\pi}{2}}$

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
台灣省第四區複賽物理科筆試參考解

[第四題]

參考解:

(1) $E = hc/\lambda$, h = 普郎克常數, c = 光速

(2) $E = mc^2$, c = 光速

(3) 假設光子具有質量 $m = \frac{h}{\lambda c}$, 太陽質量 M , 因此光子距離太陽 r 處之引力為:

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{M}{r^2} \frac{h}{\lambda c}$$

光子以光速作半徑 r 之圓周運動所需之向心力為:

$$F_c = ma_c = \frac{h}{\lambda c} \frac{c^2}{r} = \frac{hc}{\lambda r}$$

光子無法逃脫太陽引力之條件為 $F_g > F_c$:

$$G \frac{M}{r^2} \frac{h}{\lambda c} > \frac{hc}{\lambda r}$$

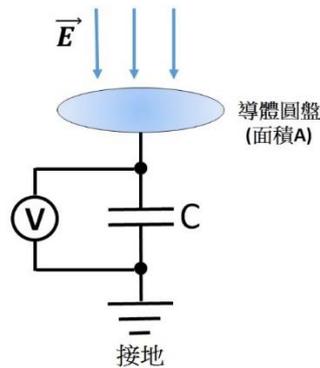
因此可知 $r < \frac{GM}{c^2} = (6.67 \times 10^{-11}) \cdot \frac{2 \times 10^{30}}{(3.00 \times 10^8)^2} \sim 1000$ (公尺)

所以最大史瓦茲半徑約為 1000 公尺

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
台灣省第四區複賽物理科筆試參考解

[第四題]

2. 小美設計了一臺儀器去測量大氣地表電場與地空間的傳導電流(earth-air conduction current), 如下圖所示. 請回答下列問題:
- (1) (3%) 小美發現當她站在戶外時, 頭腳之間的電位差約為 300V, 為何小美沒有觸電的感覺?
 - (2) (3%) 為何在一垂直電場強度 E 作用下, 導體圓盤上的感應電荷量為 $Q = \epsilon_0 AE$? (真空介電常數 $\epsilon_0 \cong 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$, A 為圓盤面積)
 - (3) (3%) 請問小美如何透過伏特計的讀數估計地表電場?
 - (4) (3%) 如何利用此儀器估計地空傳導電流?



參考解:

(1) 相對地表空氣層而言, 人體可視為良好導體(good conductor), 因此人站在地面上. 人與地面可近似為同位面, 頭與腳間之電位差幾乎為零. 因為地表的空氣層為不良導體(poor conductor), 因此從地表經由腳傳到頭的電流非常小, 所以並不會有強烈觸電的感覺.

(2) Q 越大所產生的電力線越密集, 面積越大所包含的電力線數目越多, 可推知 $Q \propto EA$, 比例常數為真空介電常數 ϵ_0 , 因此導體圓盤上的電量 $Q = \epsilon_0 AE$.

(3) 假設導體圓盤與地面之間的電容值視為 C , 伏特計測量的電位差為 V , 導體圓盤上的感應電荷 $Q = \epsilon_0 AE$, 三者關係可寫成:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 AE}{V},$$

因此可將地表電場表示成:

$$E = \frac{C}{\epsilon_0 A} V$$

(4) 假設地空傳導電流為 J , 將導體圓盤暴露於空氣中以收集地空傳導電流 J 傳來的電荷 Q , 假設暴露時間為 t , 因此 $Q = \rho(vtA) = (\rho v)tA = JtA$, 其中 ρ = 空氣中的電荷密度, v = 電荷向下移動速度, 此電荷 Q 將使導體圓盤與地面

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

台灣省第四區複賽物理科筆試參考解

之間產生電位差 V :

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{JtA}{C},$$

因此可將地空傳導電流表示成:

