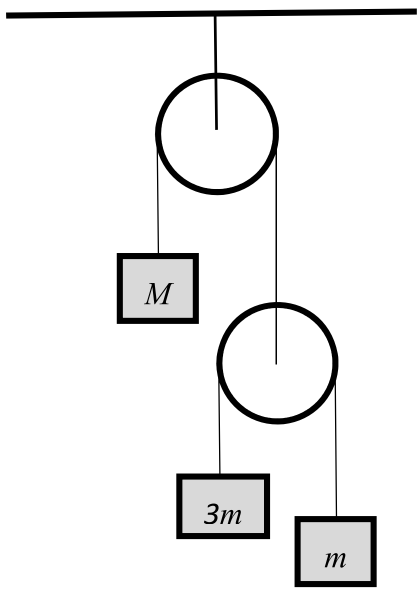
109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄區複賽

物理科筆試參考解

【第一題】(範圍:牛頓定律)(15 分)

有一系統包含滑輪、細繩與重物，此系統垂掛於天花板上，重物的質量如下圖所示。系統裝設完成後釋放，如果其中有一重物保持靜止，請問M/m是多少?(不考慮摩擦力及滑輪、細繩的質量)



【第一題】參考解

假設向上為正、質量 M 的重物受細繩張力T_1加速度a_1、質量 $3m$ 的重物受細繩張力T_2加速度$-a_2$、質量 m 的重物受細繩張力T_2加速度a_3。則系統滿足以下五個式子：

$$T_1 - Mg = Ma_1，$$

$$T_2 - 3mg = -3ma_2，$$

$$T_2 - mg = ma_3，$$

$$T_1 = 2T_2，$$

$$2a_1 = a_2 - a_3，$$

〈其中最後一式來自於:假設質量 $3m(m)$的重物相對於動滑輪的加速度為$-a_r(a_r)$，則$-a_2-(-a_1)=-a_r$， $a_3-(-a_1)=a_r$，合併兩式可得。〉

五個未知數$a_{1,2,3}$及$T_{1,2}$即可用解此五個聯立方程式獲得:

$$T_1 = 4Mg/(2+\frac{2M}{3m})，$$

$$T_2 = 2Mg/(2+\frac{2M}{3m})，$$

$$a_1 = (2-\frac{2M}{3m})g/(2+\frac{2M}{3m})，$$

$$a_2 = 2g/(2+\frac{2M}{3m})，$$

$$a_3 = (-2+\frac{4M}{3m})g/(2+\frac{2M}{3m})，$$

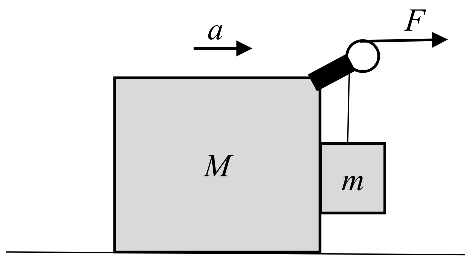
其中a_2不可能等於零代表質量 $3m$ 的重物不可能靜止，當$M/m=3$時$a_1=0$代表質量 M 的重物靜止；所以當$M/m=3/2$時$a_3=0$代表質量 m 的重物靜止。

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄區複賽

物理科筆試參考解

【第二題】(範圍:摩擦力)(15 分)

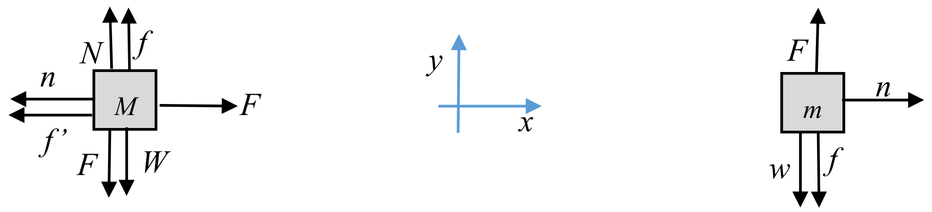
大小兩個方塊質量分別為 M 與 m，大方塊上固定著滑輪，另有細繩穿過滑輪並懸掛著小方塊，兩方塊間及大方塊與桌面間的動摩擦係數都是 μ，如下圖所示。當有一外力 F 施加於細繩上，使整個裝置以 a 的加速度向右前進，請用 M、m、μ、a 與重力加速度 g 來表示外力 F 及小方塊的鉛直方向加速度 a_1。（不考慮滑輪與細繩的質量）



【第二題】參考解

大方塊所受的力如下圖左方，其中 N 為桌面給的正向力，f' 為桌面給的摩擦力，W 為重力，n 為小方塊給的正向力，f 為小方塊給的摩擦力，向右的 F 為外力拉細繩、細繩拉滑輪的力，向下的 F 為小方塊拉細繩、細繩拉滑輪的力。

小方塊所受的力如下圖右方，其中 w 為重力，n 為大方塊給的正向力，f 為大方塊給的摩擦力，向上的 F 為細繩拉小方塊的力。小方塊在 y 方向加速度為 a_1。



因為 $W = Mg$、$f' = \mu N$、$f = \mu n$、$w = mg$，利用牛頓第二定律，對大方塊而言在 x 方向

$$F - n - \mu N = Ma，$$

在 y 方向

$$N + \mu n - F - Mg = 0；$$

對小方塊而言在 x 方向

$$n = ma，$$

在y方向

$$F-mg-\mu n=ma_1。$$

最後一式先留著，前三個式子消去N與n後得

$$F-ma-\mu(F-\mu ma+Mg)=Ma，$$

$$\Rightarrow F-\mu F=Ma+ma+\mu Mg-\mu^2 ma，$$

接著得到

$$F=(Ma+ma+\mu Mg-\mu^2 ma)/(1-\mu)。$$

最後把F與n帶入剛才的最後一式得到

$$a_1=[a\left(1-\mu+\frac{M}{m}\right)-g\left(1-\mu-\mu\frac{M}{m}\right)]/(1-\mu)。$$

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄區複賽

物理科筆試參考解

【第三題】

簡諧運動在自然界中可以說是隨時且隨處可見的現象。我們對一保守力場所對應的位能在其平衡點附近作泰勒展開，便會發現物體在平衡點附近的運動即近似簡諧運動，這也就是為什麼在生活中一般固體材料稍稍受到敲擊即行明顯聲響的原因。

今考慮一質量為 m 之質點，受到連心引力作用下做半徑為 R 之圓周運動，該連心引力量值為 $F=\alpha r^n$，其中比例常數 $\alpha>0$，r 為運動質點與固定力心之距離，其乘冪 n 為一實常數。

(1)若質點在圓軌道上於徑向之微幅振盪是穩定的，則 n 須滿足何條件？(6 分)

(2)承上題，質點若在其穩定圓軌道上有徑向微幅振盪，試求其徑向振盪之週期？（以 α、m、n、R 表示）(6 分)

(3)當質點於穩定圓軌道之運動週期，為其徑向微幅振盪週期之 N 倍時（N 為正整數），則 n 與 N 的關係為何？(6 分)

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄區複賽

物理科筆試參考解

第三題

一. (1) Central force $\xrightarrow{\text{provides}}$ centripetal force

$$\alpha R^n = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\alpha R^{n+1}}{m}}$$

When the particle shift slightly in the radial direction, the angular momentum is still conserved.

$$mvR = mv'(R+\Delta r)$$

In the rotating system

$$F = \frac{mv'^2}{R+\Delta r} - \alpha(R+\Delta r)^n$$

$\because \Delta r \ll R$

$$\therefore F = \alpha R^n\left(1+\frac{\Delta r}{R}\right)^{-3} - \alpha R^n\left(1+\frac{\Delta r}{R}\right)^n$$

$$= -(n+3)\alpha R^{n-1}\Delta r$$

Obviously, when $n+3>0$, F satisfies the condition that the particle oscillates in the radial direction, and the perturbation of the particle in the radial direction is stable.

(2) From the answer to the first problem, the oscillation period is

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(n+3)\alpha R^{n-1}}}$$

(3) Uniform circular motion, $T_{rot} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha R^{n-1}}}$

$$T_{rot} = NT \quad , \quad N \in Z$$

$$\therefore n = N^2 - 3$$

物理科筆試參考解

【第四題】

一般固體材料之彈性行為滿足虎克定律，其所受應力 σ 與其應變 ε 呈線性關係：$\sigma = E\varepsilon$。其中應力定義為介質於每單位面積所受之作用力，應變定義為介質沿其受力方向的每單位長度之形變量，比例常數 E 稱為該介質之楊氏模數。

日本物理學家飯島澄男於 1991 年發現了奈米碳管。奈米碳管是單層的純碳柱狀結構，其中碳原子以 sp^2 混成而表現出高楊氏模數的力學特性。單層奈米碳管可分為三種基本幾何形狀：鋸齒型、手椅型、螺旋型。本題考慮某奈米碳管，其截面積為 A、長度為 z_0，當沿管軸方向受到力 F 作用後，於彈性限度內之小長度變化量為 Δz，可得其楊氏模數 $E = \dfrac{Fz_0}{A\Delta z}$。

(1) 若碳-碳原子間鍵結可以莫爾斯位能函數來表示，即 $V(x) = V_0\left(e^{-\frac{4x}{b}} - 2e^{-\frac{2x}{b}}\right)$，其中常量 V_0 為平衡態之結合能，b 為兩個碳原子平衡時(x=0)之鍵長，x 為相對於平衡時之鍵長的形變量。在微幅振盪 $x \ll b$ 之近似下，碳-碳原子間位能函數可表為 $V(x) \approx -V_0 + \dfrac{1}{2}kx^2$，則力常數 k 為何？(6 分)

[以 V_0 及 b 表示。提示：泰勒級數為 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$; $f^{(n)}(0)$ 表示函數 f 在 x=0 處的 n 階導數。]

(2) 設沿著奈米碳管管軸方向之碳-碳鍵結為影響管軸方向楊氏模數之

主要因素，而截面積變化的效應可忽略。已知 $V_0 = 4.93$ eV，$b = 1.42$ Å，考慮某奈米碳管沿管軸之長度為 10 個碳-碳鍵長、碳管截面周長為$10\sqrt{3}$個碳-碳鍵長，則其沿管軸方向之楊氏模數為若干 GPa？(6 分)（1 eV = 1.602×10^{-19} J）

109 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽高雄區複賽

物理科筆試參考解

第四題

(1) Morse potential energy function of CNT is of the form

$$V(x) = V_0\left(e^{\frac{-4x}{b}} - 2e^{\frac{-2x}{b}}\right)$$

Taylor expansion

$$V(x) \approx V_0\left[1 - \frac{4x}{b} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{4x}{b}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{1}{2!}\left(\frac{-2x}{b}\right)^2\right)\right]$$

$$= -V_0\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)$$

Thus,

force constant $k = \frac{8V_0}{b^2}$

(2) Young's modulus of zigzag CNT

$$E = \frac{Fz_0}{A\Delta z} = \frac{(K\Delta z)(Nb)}{(\pi r^2)\Delta z} = \frac{8NV_0}{\pi b r^2}$$

where N is the # of C-C bonding along the axis of tube

$$2\pi r = N(\sqrt{3}b)$$

$\therefore$ Radius of the tube, $r = \frac{\sqrt{3}Nb}{2\pi}$

Hence,

$$E = \frac{32\pi V_0}{3Nb^3}$$

Substitute $N = 10$, $V_0 = 4.93\,eV$, and $b = 1.42\,Å$ into the formula above, then it gives

$$E = \frac{32\pi(4.93\times1.602\times10^{-19})}{3\times10\times(1.42\times10^{-10})^3} = 9.243\times10^{11}\ Pa$$

$$= 924.3\ GPa$$