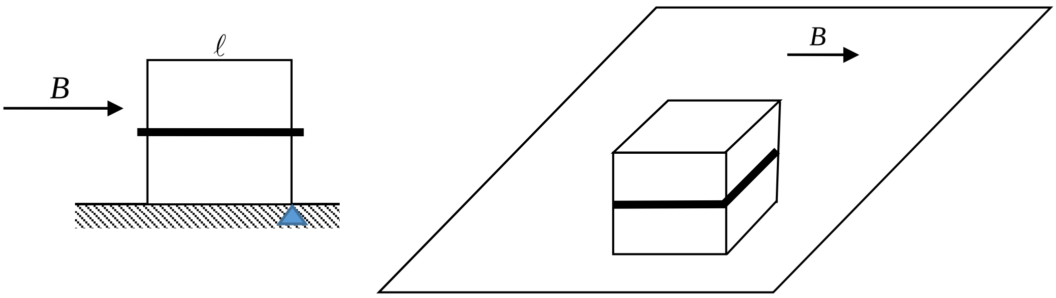
110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題及參考解

說明：(1) 請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
(2) 本試題卷共四題，請依題號在答案卷上指定位置作答，試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

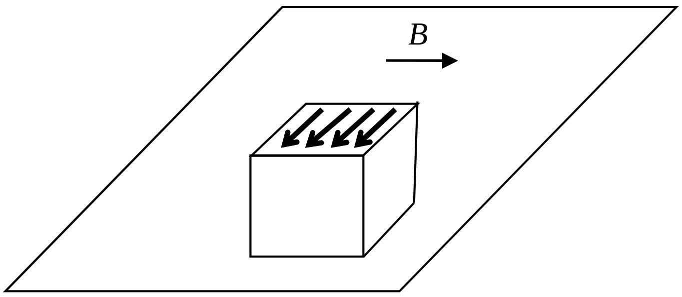
已知載流導線在磁場中所受磁力為$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$，其中 $\vec{\ell}$ 的方向是指導線電流流動方向。某單一線圈纏繞在正立方體柱(長寬高均ℓ)上，通以電流 I，線圈面與水平面平行如圖。空間中有均勻磁場 B 與水平面平行，若此時方柱恰出現即將轉動但不滑動的狀況。



(1) 試計算地面對方柱的正向力量值[5 分]與摩擦力量值[5 分]。

(2) 若線圈電流由上往下看時為逆時針，且將電流降低為原先的$\frac{1}{3}$，則正向力的作用點至圖中方柱右下角(三角形標示處)距離為何[5 分]？

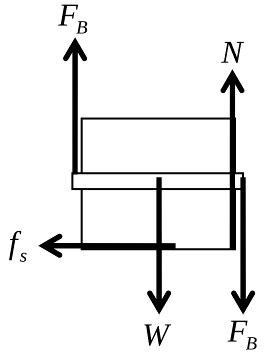
(3) 移除載流導線，假設電流均勻分佈流經方柱之頂面如下圖。已知方柱重量為 W，試計算電流至少要到達多大，才可以使方柱翻轉 (以ℓ 、B、W 表達)[5 分]。



110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題及參考解

【第一題參考解】

(1)
此圖的電流若為順時針，則會以方柱左下角為支點翻轉，反之逆時針電流則會以右下角為支點翻轉。兩者計算結果相同。下圖以逆時針電流為例



封閉線圈在均勻磁場中磁力總和為零 (效果類似力偶)，故分析$\sum F=0$時，僅需考慮正向力、重力、摩擦力。

$\sum F_x=0$： $f_s=0$　　　$\sum F_y=0$：$N=W$ (方柱重)

而封閉線圈在均勻磁場中提供力矩，以方柱右下角為支點：$\sum\tau=0$

$$\tau_{F_B}=\tau_W \qquad \Rightarrow IBA\sin\theta=W\cdot\frac{\ell}{2} \qquad \Rightarrow IB\ell^2\sin 90^\circ=W\cdot\frac{\ell}{2} \qquad \Rightarrow W=2IB\ell$$

(恰轉動表示正向力恰通過方柱右下角)

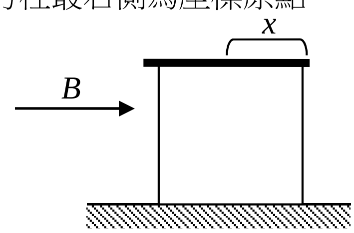
(2) 電流變小使得磁力矩變小，會導致正向力作用點向左移動。

以方柱右下角為支點$\sum\tau=0$　　$\Rightarrow \tau_{F_B}+\tau_N=\tau_W$

$$\frac{1}{3}(W\cdot\frac{\ell}{2})+W\cdot x=W\cdot\frac{\ell}{2} \qquad \Rightarrow x=\frac{\ell}{3}$$

(電流減為 1/3，磁力矩會減為(1)的 1/3，以$\frac{1}{3}(W\cdot\frac{\ell}{2})$表示)

(3) 以方柱最右側為座標原點



計算上表面每部份電流造成的力矩再取總和

$$\tau_{F_B} = \int (dF_B)\cdot x = \int_0^{\ell} (dI\cdot \ell B)\cdot x = \int_0^{\ell} (\frac{dx}{\ell} I\cdot \ell B)\cdot x = \frac{1}{2} I\ell^2 B$$

$$\sum \tau = 0 \qquad \tau_{F_B} = \tau_W \qquad \Rightarrow \frac{1}{2} I\ell^2 B = W\cdot \frac{\ell}{2} \qquad \Rightarrow I = \frac{W}{\ell B}$$

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題及參考解

【第二題】

自然界裡的波動無論是橫波或縱波皆遵守特定的偏微分方程式：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$（對一維波動而言），其中$u(x,t)$為波上各點在空間中隨時間的位置函數。行進中的正弦波$u(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$可為此偏微分方程式的一個解，$k$及$\omega$是對波動有意義的特定常數。

(1) 若某波動方程式滿足$u(x,t)=10\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{6}t)$，試計算 x=2 處在第 1 秒末的振動速度大小[5 分]與 6 秒內移動的路徑長[5 分]。

(2) 計算橫波介質質點的振動速度時，可由波形斜率來作分析，波形上某點的切線斜率為$\tan\theta$。試證明正弦波$u(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$上質點振動速度滿足:

$v_{質點振動}=\tan\theta\cdot v_{波速}$ [5 分]。

［Hint：k及ω的特定條件是滿足經過一週期的時間或移動後，波形整體不變的週期性$u(x+\lambda)=u(x)$ & $u(t+T)=u(t)$］

(3) 考慮兩完全相等的行進波相向而行重疊，其中$u_1(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$，$u_2(x,t)=A\sin(kx+\omega t)$，重疊後的合成波將形成駐波，一個波形不再向外傳遞，只在原地振幅規律增減。試利用波的疊加性，證明兩個正弦波形成的駐波其公式為何[5 分]，並說明為何此駐波波形不隨時間行進[5 分]。此外，找出節點在空間中分布的一般解(以波長λ表達) [5 分]。

【第二題參考解】

(1) $v(x,t)=\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{\pi}{6}\cdot 10\cos(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{6}t)=-\dfrac{\pi}{6}\cdot 10\cos(\dfrac{\pi}{4}\cdot 2-\dfrac{\pi}{6}\cdot 1)=-\dfrac{5\pi}{6}$

$\omega=\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{T}$，可得$T=12$秒

6 秒移動距離恰為$T/2$，故運動路徑長為$\frac{1}{2}\times(4\times 10)=20$

(2)
由波形不變的週期性$u(x+\lambda)=u(x)$，$u(t+T)=u(t)$

可知$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$，$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

由介質質點位移$u(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$，知介質質點振動速率

$v(x,t)=\dfrac{du}{dt}=-\omega\cdot A\cos(kx-\omega t)$

波形斜率$\tan\theta=\dfrac{du}{dx}=k\cdot A\cos(kx-\omega t)$

故$\tan\theta\cdot v_{波速}=\left[k\cdot A\cos(kx-\omega t)\right]\cdot\left[\dfrac{\lambda}{T}\right]=\left[k\cdot A\cos(kx-\omega t)\right]\cdot\left[\dfrac{\omega}{k}\right]=\omega\cdot A\cos(kx-\omega t)$

得證。

(3)
駐波源自兩波相向重疊，令$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$
故$u(x,t)=A\sin(kx-\omega t)+A\sin(kx+\omega t)=2A\sin(kx)\cos(\omega t)$

此解可視為一正弦波$u(x,t)=2A_{(t)}\sin(kx)$在原地不行進，其振幅$A_{(t)}=2A\cos(\omega t)$隨時間週期性變化。

故節點位於$\sin(kx)=0$位置，也就是$kx=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot x=n\pi$處，$x=\dfrac{n\lambda}{2}$處。

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題及參考解

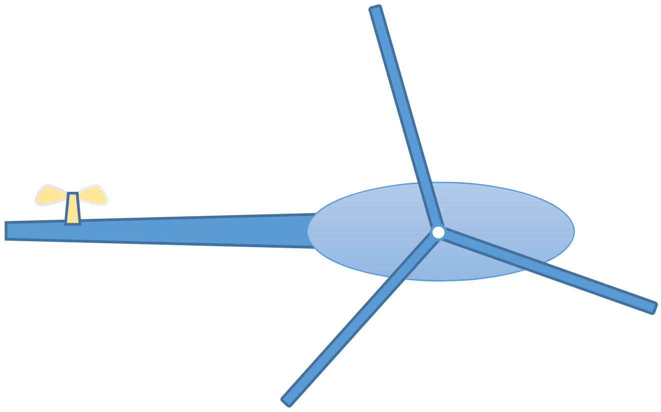
【第三題】

小明於 110 年中華民國國慶中，看到了直升機(質量 M)載巨幅國旗(m)以及配重塊(質量 M’)，飄揚著等速飛過總統府。若施加在國旗的風力為 f，請問：

(1) 請繪出國旗淨力圖，以及求出直升機所需之上升力。

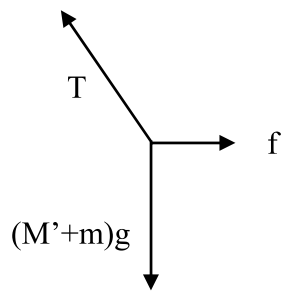
(2) 直升機扇葉從靜止加速至每分鐘 x 轉，試求出直升機所造成的角動量以及轉動動能[以 MKS 制表示]。假設直升機扇葉由三個長方形扇葉組成，每個扇葉長度 L，質量 m。[注: 當尾端固定時，長方形物體的轉動慣量為 $\mathrm{I}=\frac{1}{3}mL^2$]。

(3) 在多啦乀夢的卡通中，大雄所使用的竹蜻蜓到達天空中的任何一個地方，請問這個在現實中是否可能達到? 請解釋原因。



【第三題參考解】

(1)



直升機所需上升力為(m+M+M')g

(2)

扇葉最後角速度$\omega = \mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{min}}\right) = (\frac{2\pi}{60}x)(\frac{rad}{s})$

扇葉的總轉動慣量為=3*$(\frac{1}{3}mL^2) = mL^2$

Angular momentum 角動量 $\mathrm{L} = \mathrm{I}\omega = mL^2(\frac{2\pi}{60}x)(kg * m^2\frac{rad}{s})$

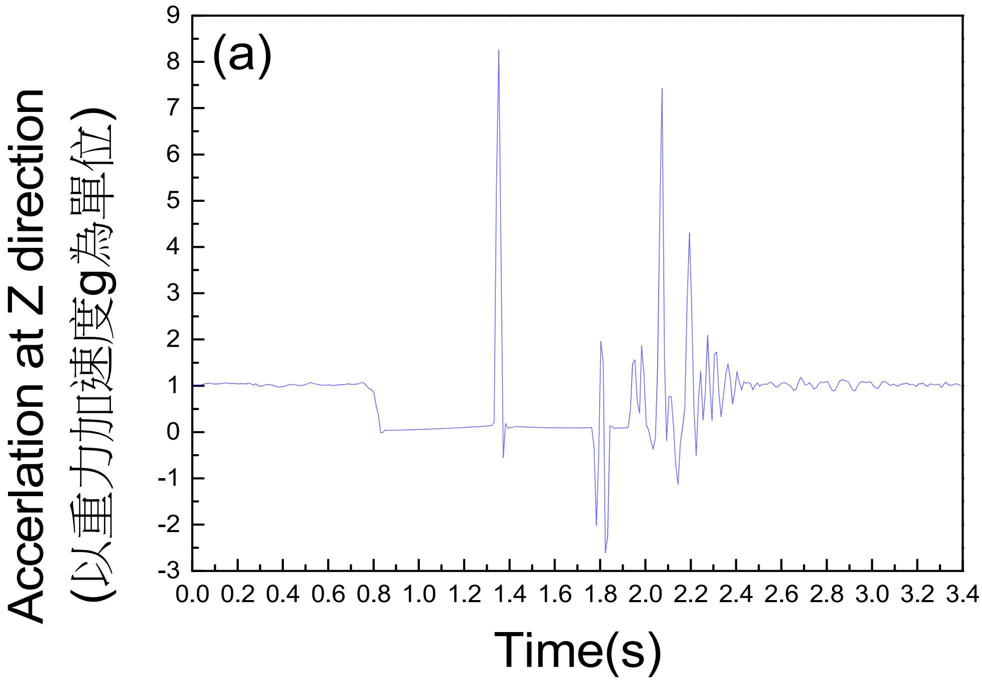
The rotational kinetic energy $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 = \frac{1}{2}mL^2(\frac{2\pi}{60}x)^2 = \frac{1}{1800}m\pi^2L^2x^2(J)$

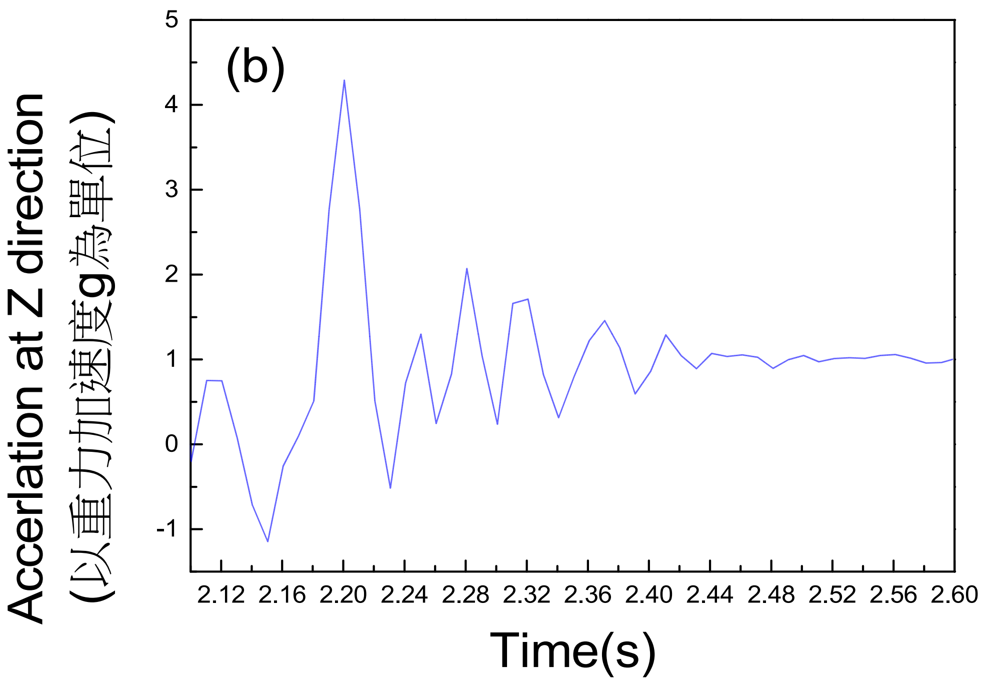
(3)

這個在現實中無法達到。因為叮噹的「竹蜻蜓」沒有尾翼，是不可能使大雄穩定地飛行的，大雄只會不停地打轉！

基於角動量守恆的原理，在沒有外力的影響下，直昇機的總角動量為零，如果我們假設機翼以順時針方向轉動，則機身應該會以相反方向，即以逆時針轉動，不停地打轉。所以，沒有尾翼的直昇機是不可能穩定下來的，因為它會一直受到一個逆時針方向的力矩。轉動的尾翼就可以為機身提供一個順時針方向的力矩，與機翼產生的力矩互相抵消，使機身穩定下來

【第四題】


(a)
Accerlation at Z direction
(以重力加速度g為單位)
Time(s)


(b)
Accerlation at Z direction
(以重力加速度g為單位)
Time(s)

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題及參考解

圖(a)顯示一台 IPHONE 落到枕頭上的垂直(z 軸)加速度數據，如果手機沒有在加速的話,其讀數為 1g。假設此台 IPHONE 重量 w 克重。試求：

(1) 手機第一次自由落體運動時間以及其下落的距離。

(2) 由圖(a)中，試找出何時(t = ?)手機會受到最大的作用力，其數值為何? 此時所受到的衝量為？

(3) 手機彈跳的次數。

(4) 請提出一物理模型描述 t=2.20 秒到 2.50 秒的運動圖(b)。

(5) 承(4), 請估算枕頭的彈性係數為？

【第四題參考解】

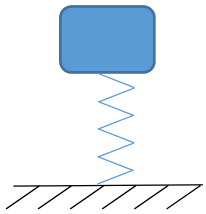
(1) 自由落體時間=0.5s 自由下落距離=$\frac{1}{2}gt^2 = 1.26(m)$

(2) 最大作用力發生於 t=1.35(s)時，最大作用力為 8.2w(kgw)=80.36w(N)，

衝量$\Delta\mathrm{P} = \int F\,dt = \frac{1}{2}(80.36\mathrm{w}) * 0.04 = 13.18\mathrm{w}(\mathrm{kg} * \mathrm{m/s})$

(3) 一共有 3 次自由落體，第一次為接觸枕頭前，所以反彈 2 次

(4)



(5) 找出平均週期為 0.042(s) 可裡用週期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\mathrm{k} = \frac{4\pi^2 w}{T^2 g} = 2.28w(N/m)$$