110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試試題及參考解

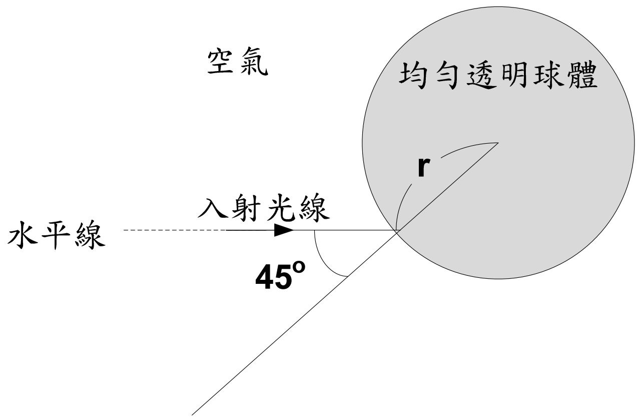
說明：(1) 請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
(2) 本試題卷共四題，請依題號在答案卷上指定位置作答，試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

如下圖所示，空氣 (假設折射率為 1) 中有一道入射光線沿水平線，以 45° 入射角，射往一個折射率為 $\sqrt{2}$，半徑為 r 的均勻透明球體。試求：

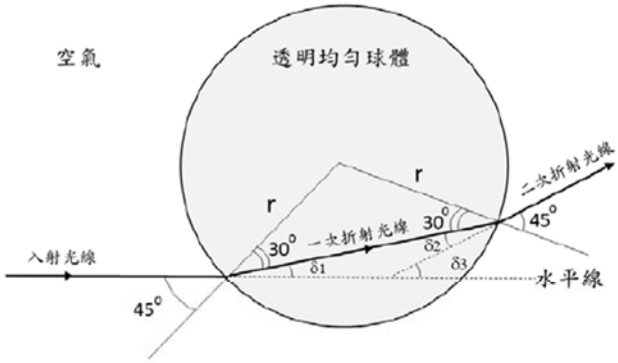
(a) 經一次折射後的光線，其行進方向與水平線之夾角為多少度 ? (5 分)

(b) 經二次折射後的光線，其行進方向與水平線之夾角為多少度 ? (5 分)



110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試試題及參考解

【第一題參考解】



(a) 第一次折射，使用史乃耳定律(Snell's law):

$n_{空氣} \cdot \sin 45^o = n_{球體} \cdot \sin \theta_1$ ，可求出第一次折射角 $\theta_1 = 30^o$ 。

所以經一次折射後的光線與水平線夾角為 $\delta_1 = \mathbf{15^o}$

(b) 第二次折射時，利用等腰三角形的特性，可得知入射角為 30^o。
再次使用史乃耳定律：

$n_{球體} \cdot \sin 30^o = n_{空氣} \cdot \sin \theta_2$ ，可求出第二次折射角 $\theta_2 = 45^o$ 。

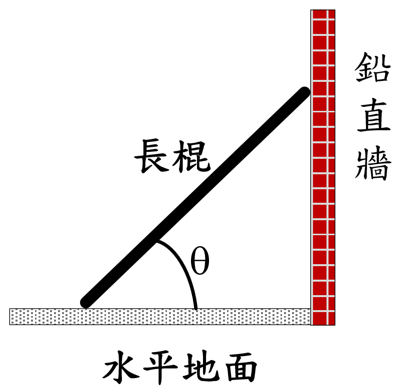
所以第二次折射，折射光線的偏折角 $\delta_2 = 45^o - 30^o = 15^o$
由上圖可看出，經二次折射後的光線與水平線夾角為 δ_3 。
利用「三角形外角等於二個遠內角之和」，可求出 $\delta_3 = \delta_1 + \delta_2 = 15^o + 15^o = \mathbf{30^o}$

【第二題】

如下圖所示，有一根質量為 m 公斤的均勻長棍，原本靜止斜立在靜摩擦係數為 μ 的水平地面上，其上端斜靠於鉛直牆面。在逐漸減小此長棍與地面之夾角的過程中，當夾角為 θ 時，長棍恰好開始下滑。試求以下兩種狀況的 θ 分別為多少 (設重力加速度為 g 米/秒^2)：

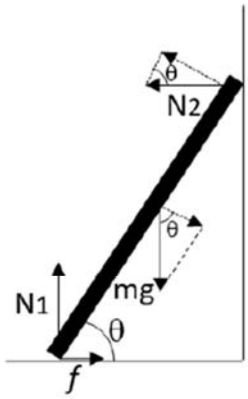
(a) 鉛直牆面光滑無摩擦； (10 分)

(b) 鉛直牆面與水平地面的靜摩擦係數均為 μ。 (10 分)



【第二題參考解】

(a)



上圖為長棍受力的力圖；其中 mg 為重力，N_1 為地面所施正向力，N_2 為牆面所施正向力，f 為長棍與地面之間的靜摩擦力。

因長棍靜止，水平方向上的合力與鉛直方向上的合力均為 0 。由此可得：

$$N_2 = f \text{，而且 } N_1 = mg \text{ 。}$$

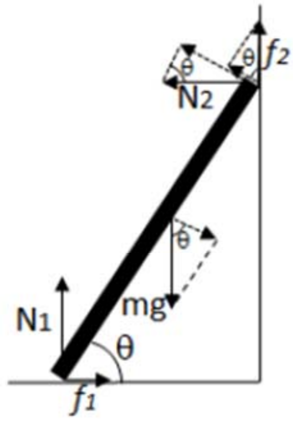
又靜摩擦力 $f = N_1 \cdot \mu$，所以 $N_2 = f = N_1 \cdot \mu = mg \cdot \mu$。

當長棍恰要開始轉動，則以長棍與地面的接觸點為支點之合力矩滿足

$mg \cdot \cos\theta \cdot \frac{\ell}{2} = N_2 \cdot \sin\theta \cdot \ell$；其中 ℓ 為長棍的長度。

$\tan\theta = \frac{mg}{2N_2} = \frac{1}{2\mu}$ ，則 $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{2\mu})}$

(b)



上圖為長棍受力的力圖；其中 mg 為重力，N_1 為地面所施正向力，N_2 為牆面所施正向力，f_1 為長棍與地面之間的靜摩擦力，f_2 為長棍與牆面之間的靜摩擦力。

因長棍靜止，水平方向上的合力與鉛直方向上的合力均為 0 。由此可得：

$$N_2 = f_1 \text{ ，而且 } mg = N_1 + f_2 \text{。}$$

又靜摩擦力 $f_1 = N_1 \cdot \mu$，$f_2 = N_2 \cdot \mu$，所以 $f_2 = N_2 \cdot \mu = f_1 \cdot \mu = N_1 \cdot \mu^2$。

又 $mg = N_1 + f_2 = N_1(1+\mu^2)$，所以 $N_1 = \frac{mg}{1+\mu^2}$ ，

$N_2 = f_1 = N1 \cdot \mu = \frac{\mu \cdot mg}{1+\mu^2}$ ，$f_2 = N_2 \cdot \mu = \frac{\mu^2 \cdot mg}{1+\mu^2}$

當長棍恰要開始轉動，則以長棍與地面的接觸點為支點之合力矩滿足

$mg \cdot \cos\theta \cdot \frac{\ell}{2} = N_2 \cdot \sin\theta \cdot \ell + f_2 \cdot \cos\theta \cdot \ell$；其中 ℓ 為長棍的長度。

$$mg \cdot \cos\theta \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\mu \cdot mg}{1+\mu^2} \cdot \sin\theta \cdot \ell + \frac{\mu^2 \cdot mg}{1+\mu^2} \cdot \cos\theta \cdot \ell$$

可得 $\tan\theta = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$ ，則 $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1-\mu^2}{2\mu}\right)}$

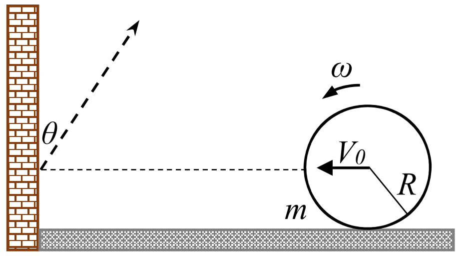
【第三題】(15%)

如圖所示，有一半徑為 R 、質量為 m 的圓環在一光滑平面上運動。此環以角速率 ω 旋轉，質心速率為 V_0 ，撞向垂直牆面。已知碰撞後，圓環的行進方向與牆面的夾角為 θ。假設此環與牆面接觸期間因相對滑動而產生摩擦力(動摩擦係數為 μ_k)。試問，

(a) 若 μ_k 為定值，則 θ 的最大值為何？

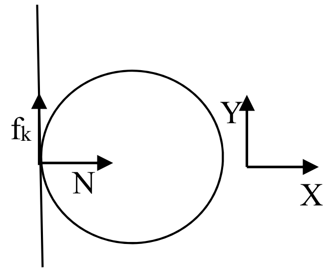
(b) 碰撞後，圓環的質心速率為何？

(c) 碰撞後，圓環轉動的角速率為何？



【第三題參考解】

(a)設此環與牆面接觸時間為 Δt，在此作用時間中，圓環受到牆面的正向力平均值為 N 及動摩擦力平均值為 f_k，則 $f_k = N\mu_k$ ……..……①



令碰撞後在 x, y 方向的質心速率分別為 Vx 及 Vy，則

$$\begin{cases} m\dfrac{\Delta Vx}{\Delta t}=N \\ m\dfrac{\Delta Vy}{\Delta t}=f_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m[Vx-(-Vo)]=N\Delta t & \text{………②} \\ m[Vy-0]=f_k\Delta t & \text{…………③} \end{cases}$$

$$\frac{Vy}{Vx}=\cot\theta \text{ ……………...…④}$$

由①-④可得：$Vx=\dfrac{N\Delta t}{m}-Vo=\dfrac{f_k\Delta t}{m\mu_k}-Vo=\dfrac{Vy}{\mu_k}-Vo=\dfrac{Vx}{\mu_k}\cot\theta-Vo$ 或 $Vx=\dfrac{Vo}{\dfrac{\cot\theta}{\mu_k}-1}$

因為 $Vx, Vo>0 \Rightarrow \dfrac{\cot\theta}{\mu_k}>1 \Rightarrow \cot\theta>\mu_k$

$\Rightarrow \tan\theta<\dfrac{1}{\mu_k} \Rightarrow \theta<\tan^{-1}(\dfrac{1}{\mu_k}) \Rightarrow$ $\boxed{\theta \text{ 值的上限為 } \tan^{-1}(\frac{1}{\mu_k})}$

(b)$V_y = V_x\cot\theta$

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=V_x\sqrt{1+cot^2\theta}=\frac{V_x}{sin\,\theta} \Rightarrow \boxed{V=\frac{V_0\mu_k}{cos\,\theta-\mu_k\,sin\,\theta}}$$

(c)碰撞期間圓環所受力矩為

$\tau = -Rf_k = -RN\mu_k$

設 w' 為末角速率，則角動量變化 $\Delta L = mR^2w' - mR^2w = \tau\,\Delta t = -RN\mu_k\,\Delta t$

$$\Rightarrow w' = w-\frac{\mu_k}{mR}N\Delta t = w-\frac{\mu_k}{mR}\frac{f_k\Delta t}{\mu_k}=w-\frac{mVy}{mR}=w-\frac{Vy}{R}=w-\frac{Vo}{R}\frac{cot\,\theta}{\dfrac{cot\,\theta}{\mu_k}-1}$$

$$\boxed{w' = w-\frac{Vo}{R}\frac{cot\,\theta}{\dfrac{cot\,\theta}{\mu_k}-1} \quad or \quad w-\frac{Vo}{R}\frac{\mu_k}{1-\dfrac{\mu_k}{cot\,\theta}} \quad or \quad w-\frac{Vo\mu_k}{R-\dfrac{R\mu_k}{cot\,\theta}}}$$

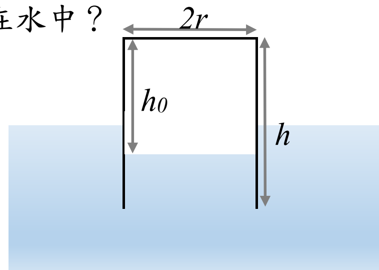
【第四題】(15%)

如圖所示，有一可視為空心圓柱體的杯子，質量 M，高度 h，底部半徑 r，開口向下垂直倒立水中，杯中空氣所占高度為 h_0，假設杯子厚度、空氣密度可忽略不計，水的密度為 ρ。試問，

(a) 若欲使此杯垂直倒立於水中且杯底高於水面，則 M 的最大值為何？

(b) 若欲使此杯垂直倒立於水中且杯子不側翻，則 M 的最小值為何？

(c) 若 h_0 大於何值，則杯子將無法穩定垂直倒立浮在水中？



【第三題參考解】

(a) 杯重＝浮力＝排開水重，設杯底與杯外水面的高度差為 h_1

$$Mg = \rho(h_0 - h_1)\,\pi r^2 g$$

$$\Rightarrow\ h_1 = h_0 - \frac{M}{\rho\,\pi r^2}$$

杯底高於杯外水面 $h_1 \geq 0 \Leftrightarrow h_0 \geq \dfrac{M}{\rho\,\pi r^2} \Leftrightarrow \boxed{M \leq \rho\,\pi r^2\, h_0}$

(b) 杯子重心與杯底之高度差 $h_c = \dfrac{(2\pi r h)(\frac{h}{2})}{\pi r^2 + 2\pi r h} = \dfrac{h^2}{r+2h}$

浮力作用中心與杯底之高度差 $h_1 + \dfrac{1}{2}(h_0 - h_1)$

不側翻，即 重心 低於 浮力作用中心

$$h_c \geq h_1 + \frac{1}{2}(h_0 - h_1) \Leftrightarrow \frac{h^2}{r+2h} \geq \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{h^2}{r+2h} \geq \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0 - \frac{M}{\rho\, 2\pi r^2} \Leftrightarrow \frac{M}{\rho\, 2\pi r^2} \geq h_0 - \frac{h^2}{r+2h}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M \geq \rho\, 2\pi r^2 (h_0 - \frac{h^2}{r+2h})}$$

(c) 若 $\rho\pi r^2 h_0 < \rho\, 2\pi r^2 (h_0 - \dfrac{h^2}{r+2h})$

在這種情況下，則無法有一個質量 M 可同時滿足(a)、(b)兩個條件，

即 $h_0 < 2(h_0 - \dfrac{h^2}{r+2h}) \Leftrightarrow \boxed{h_0 > \dfrac{2h^2}{r+2h}}$