

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第一題】(15%)

有兩顆半徑均為 $r$ 的金屬球，其中一顆質量為 $m$ 、帶有 $Q$ 的電荷，另一顆質量為 $m/3$ 、帶有 $-5Q$ 的電荷。一開始兩球被固定在無摩擦且絕緣的水平面上，且兩球心的距離為 $10r$ 。在兩球同時釋放後，它們逐漸靠近並進行彈性碰撞，在不考慮所有極化效應的情況下，請問質量為 $m$ 的球在碰撞後，與另一球相距非常遙遠時速度為多少？(庫倫常數為 $k$ )

【第一題】參考解

$$\text{釋放前後動量守恆，所以 } 0 = mv_1 + \frac{m}{3}(-3v_1)$$

釋放前總能量只有位能，等於碰撞前總能量：

$$\frac{kQ(-5Q)}{10r} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}(-3v_1)^2 + \frac{kQ(-5Q)}{2r},$$

所以碰撞前速度平方為：

$$v_1^2 = \frac{1}{2m}kQ(-5Q)\left(-\frac{1}{2r} + \frac{1}{10r}\right)。$$

碰撞後電荷中和並均分為 $-2Q$ ，其總能量為：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}(-3v_1)^2 + \frac{k(-2Q)(-2Q)}{2r}$$

等到兩球距離非常遙遠時，位能為零只剩動能

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}(-3v_1)^2 + \frac{k(-2Q)(-2Q)}{2r} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}(-3v_2)^2$$

所以

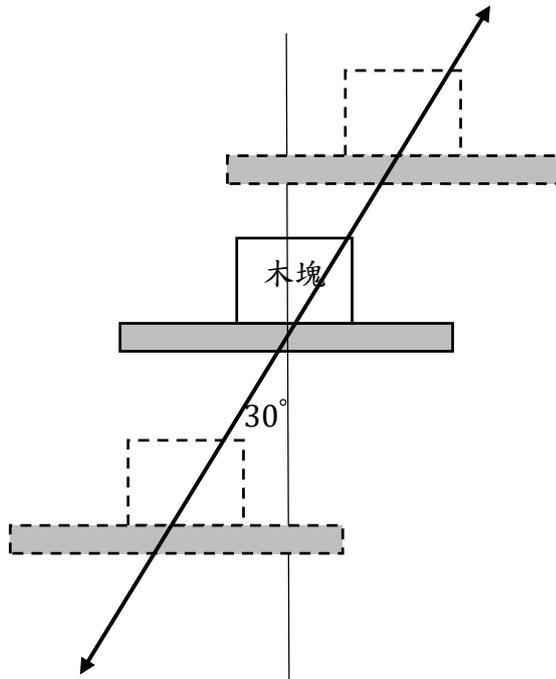
$$\begin{aligned} 2mv_2^2 &= kQ(-5Q)\left(-\frac{1}{2r} + \frac{1}{10r}\right) + \frac{k(-2Q)(-2Q)}{2r} \\ &= kQ^2\left[5\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{10r}\right) + \frac{4}{2r}\right] \end{aligned}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{kQ^2}{2mr}\left[5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right)\right]} = \sqrt{\frac{2kQ^2}{mr}}$$

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第二題】(15%)

一木塊放置在一水平平板上，木塊與平板之間的靜摩擦係數為 $\mu$ 。現在平板以保持水平的方式進行頻率為 $f$ 的簡諧振動，其振動方向與垂直線的夾角為 $30^\circ$ ，如下圖所示。假設振動的振幅為 $A$ ，求當(a)木塊可以在平板上滑動時，(b)木塊可以脫離平板時， $A$ 的最小值。(重力加速度為 $g$ )



【第二題】參考解

平板做簡諧振動時解為

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta),$$

其中 $A$ 為振幅， $\omega$ 為角頻率，頻率 $f$ 與 $\omega$ 的關係為

$$\omega = 2\pi f,$$

平板最大加速度為

$$a_{\max} = \omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A$$

在垂直方向最大加速度為

$$a_{\parallel} = 4\pi^2 f^2 A \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\pi^2 f^2 A$$

在最高點時，木塊施予平板的正向力

$$N = m(g - a_{\parallel})$$

當 $N = 0$ 時代表木塊可以脫離平板，即

$$2\sqrt{3}\pi^2 f^2 A = g$$

所以

$$\boxed{A = g / (2\sqrt{3}\pi^2 f^2)}$$

在水平方向最大加速度為

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
高雄區複賽物理科筆試參考解

【續第二題】參考解

$$a_{=} = 4\pi^2 f^2 A \sin 30^\circ = 2\pi^2 f^2 A$$

當摩擦力等於木塊水平加速度時，木塊便會滑動

$$\mu N = ma_{=}$$

所以

$$\begin{aligned}\mu m(g - a_{\parallel}) &= ma_{=} \\ \Rightarrow \mu(g - 2\sqrt{3}\pi^2 f^2 A) &= 2\pi^2 f^2 A \\ \Rightarrow \mu g &= 2\pi^2 f^2 A(\sqrt{3}\mu + 1) \\ \Rightarrow A &= \mu g / [2\pi^2 f^2 (\sqrt{3}\mu + 1)] \\ \Rightarrow A &= \boxed{g / [2\pi^2 f^2 (\sqrt{3} + 1/\mu)]}\end{aligned}$$

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第三題】(10%)

望遠鏡的基本原理是利用一個放大鏡來觀看由凸透鏡或者凹面鏡所呈現遠方物體的影像，此時凸透鏡或是凹面鏡就稱為物鏡（對著物體的鏡片），放大鏡就稱為目鏡。藉由調整兩鏡之間的距離使得影像變得更加清晰。

今科學家以焦距為 5 cm 的目鏡和焦距為 40 cm 的物鏡觀察物體，為了聚焦可移動兩透鏡之間的距離。

(a) 物鏡前 2m 處之物體，最終成像在物鏡前 2m (與物體同處)，則此二透鏡之間距離是多少公分 [5 分]?

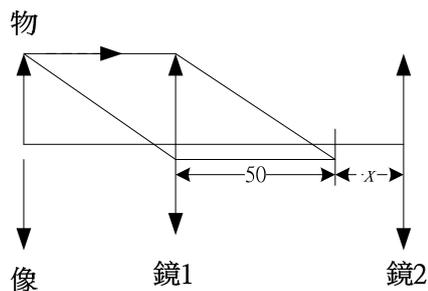
(b) 承(a)，放大率為何 [5 分]?

【第三題】參考解

(a) 由焦距 40cm 的物體所構成實像  $S_1$

$$\text{使用高斯成像公式: } \frac{1}{200} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{40} \Rightarrow q_1 = 50\text{cm}$$

第二次的成像:



假設第一次的實像到鏡 2 的距離為  $x$  cm

$$\text{使用 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{(-1)}{250+x} = \frac{1}{5} \Rightarrow x \approx 4.9038\text{ cm}$$

所以兩鏡的距離為  $50+4.9$  cm

$$\text{物鏡的放大率 } m_1 = \left| \frac{q_1}{p_1} \right| = \frac{50}{200} = 0.25$$

$$\text{目鏡的放大率 } m_2 = \left| \frac{254.9}{4.9} \right| \approx 52$$

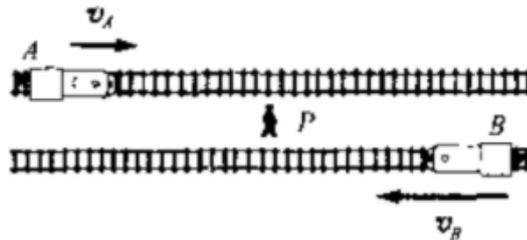
$$\text{總線性的放大率 } M = m_1 m_2 = 0.25 \times 52 = 13$$

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第四題】(20%)

如圖所示觀察者 P 站在兩相鄰平行鐵軌之間，兩列車由遠處相向行駛靠近 P，火車 A 的速度  $v_A=15 \text{ m/s}$  且發出之鳴聲之初始頻率為  $f_0=200 \text{ Hz}$ ，火車 B 速度  $v_B=30 \text{ m/s}$ 。若空氣中聲速為  $340 \text{ m/s}$ ，忽略風速。

- (a) 求觀察者 P 接收到的火車 A 發出鳴聲的波長  $\lambda$  [3 分] 和頻率  $f_1$  [3 分]。  
 (b) 求火車 B 上的工程師聽到的鳴聲之頻率  $f_2$  [4 分]。  
 (c) 假設聲波因為反射的關係，可經由火車 B 將波反射至觀察者 P 點與火車 A。  
 求觀察者 P 聽到反射波的頻率  $f_3$  [5 分]。  
 求火車 A 上的工程師聽到的反射波之頻率  $f_4$  [5 分]。



【第四題】參考解

- (a) 使用都卜勒公式

題目中的條件為  $V_A = 15 \text{ m/s}$ ， $f_0 = 200(\text{Hz})$

$$\text{波長 } \lambda_1 = \frac{V_{\text{聲}} - V_A}{f_0} = 1.625(\text{m})$$

$$\text{所接收到的頻率 } f_1 = \frac{|V_{\text{聲}}| f_0}{|V_{\text{聲}}| - |V_A|} = \frac{200(340)}{(340-15)} = 209.23(\text{Hz})$$

- (b) 此題為聲源，觀察者都運動。取向右為正方向。

$$f_2 = f_0 \frac{V + V_B}{V - V_A} = 200 \left( \frac{340 + 30}{340 - 15} \right) = 228(\text{Hz})$$

- (c)  $f_3 = f_2 \frac{V}{V - V_B} = \frac{228 \times 340}{340 - 30} = 250(\text{Hz})$

$$f_4 = f_2 \frac{V + V_A}{V - V_B} = 228 \left( \frac{340 + 15}{340 - 30} \right) = 261(\text{Hz})$$