教育部 111 學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（一）參考解

【第一題參考解】

(a) for elliptic orbit E_{tot}

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (\text{if } m \ll M)$$

Assume $m = 1$，

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM}{r_a} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{r_p}$$
$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{1}{2}v_p^2 = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p}$$

because $v_a r_a = v_p r_p$, therefore $v_p = \frac{r_a}{r_p}v_a$

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_a}{r_p}\right)^2 v_a^2 = \frac{GM}{r_a} - \frac{GM}{r_p}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}v_a^2\left[1 - \left(\frac{r_a}{r_p}\right)^2\right] = GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}v_a^2\left[\frac{r_p^2 - r_a^2}{r_p^2}\right] = GM\left(\frac{r_p - r_a}{r_a r_p}\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}v_a^2\left[\frac{r_p + r_a}{r_p}\right] = \frac{GM}{r_a}$$

because $r_a + r_p = 2a$, therefore

$$\frac{1}{2}v_a^2\left[\frac{2a}{2a - r_a}\right] = \frac{GM}{r_a}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}v_a^2 = \frac{GM}{r_a}\left[\frac{2a - r_a}{2a}\right]$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}v_a^2 = \frac{GM}{r_a}\left[1 - \frac{r_a}{2a}\right]$$

Finally,

$$E_{tot} = \frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM}{r_a} = \frac{GM}{r_a}\left[1 - \frac{r_a}{2a}\right] - \frac{GM}{r_a} = -\frac{GM}{2a}$$
$$E_{tot} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

let $\mu \equiv GM$,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$$

The speed of satellite is $v_{p,C_L} = \sqrt{\frac{\mu}{R_L}}$ at position P of circular orbit C_L.

The speed of satellite is $v_{p,E_1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_L} - \frac{\mu}{a}}$ at position P of elliptic orbit E_1.

$$\begin{aligned}
\Delta v_p &= v_{p,E_1} - v_{p,C_L} \\
&= \sqrt{\frac{2\mu}{R_L} - \frac{\mu}{a}} - \sqrt{\frac{\mu}{R_L}} \\
&= \sqrt{\frac{2\mu}{R_L} - \frac{\mu}{(R_L + R_H)/2}} - \sqrt{\frac{\mu}{R_L}} \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\left(\sqrt{\frac{2R_H}{R_L + R_H}} - 1\right) \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\left(\sqrt{\frac{2 \times 60}{1 + 60}} - 1\right) \simeq 0.403\sqrt{\frac{\mu}{R_L}}
\end{aligned}$$

The speed of satellite is $v_{a,E_1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_H} - \frac{\mu}{a}}$ at position A of elliptic orbit E_1.

The speed of satellite is $v_{a,C_H} = \sqrt{\frac{\mu}{R_H}}$ at position A of circular orbit C_H.

$$\begin{aligned}
\Delta v_a &= v_{a,C_H} - v_{a,E_1} \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{R_H}} - \sqrt{\frac{2\mu}{R_H} - \frac{\mu}{a}} \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{R_H}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_L}{R_L + R_H}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{60R_L}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_L}{R_L + R_H}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\frac{1}{\sqrt{60}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + 60}}\right) \simeq 0.106\sqrt{\frac{\mu}{R_L}}
\end{aligned}$$

$$\Delta v = \Delta v_p + \Delta v_a = 0.509\sqrt{\frac{\mu}{R_L}}$$

(b)

$$\begin{aligned}\Delta v_p &= v_{p,E_2} - v_{p,C_L} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\left(\sqrt{\frac{2\times 80}{1+80}} - 1\right) \simeq 0.405\sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta v_a' &= v_{a',E_3} - v_{a',E_2} \\ &= \sqrt{\frac{2\mu}{R^*} - \frac{\mu}{(R^*+R_H)/2}} - \sqrt{\frac{2\mu}{R^*} - \frac{\mu}{(R^*+R_L)/2}} \\ &= \sqrt{2\mu}\left[\sqrt{\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R^*+R_H}} - \sqrt{\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R^*+R_L}}\right] \\ &= \sqrt{2\mu}\left[\sqrt{\frac{R_H}{R^*(R^*+R_H)}} - \sqrt{\frac{R_L}{R^*(R^*+R_L)}}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{60}{80(80+60)}} - \sqrt{\frac{1}{80(80+1)}}\right) \simeq 0.0859\sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\Delta v_p'| &= |v_{p',C_H} - v_{p',E_3}| \\ &= \left|\sqrt{\frac{\mu}{R_H}} - \sqrt{\frac{2\mu R^*}{R_H(R^*+R_H)}}\right| \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{R_H}}\left|1 - \sqrt{\frac{2\times 80}{80+60}}\right| \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\frac{1}{\sqrt{60}}\left|1 - \sqrt{\frac{2\times 80}{80+60}}\right| \simeq 0.009\sqrt{\frac{\mu}{R_L}}\end{aligned}$$

$$\Delta v = \Delta v_p + \Delta v_a + |\Delta v_p'| = 0.4999\sqrt{\frac{\mu}{R_L}}$$

方法二的Δυ小於方法一的Δυ！

(c)在低軌道時，耗較少能量即可得到脫逃速度(至無限遠處)

【第二題參考解】

(a) $Q'/2r=q1/r=q2/r$ 且 $Q'+q1+q2=Q \rightarrow Q'=Q/2,\ q1=q2=Q/4$

置於中間的大球受力為

$-kQ'*q1/(d-x)^2 + kQ'*q1/(d+x)^2$

$\cong (kQ^2/8)(-1/(d^2-2dx)+ 1/(d^2+2dx))$

$\cong (kQ^2/8\ d^2)(-1-2x/d+ 1-2x/d)$

$= -kQ^2x/2d^3$

受力和位移呈現性正比，可知其為簡協震盪，其"彈性常數 K"為 $kQ^2/2d^3$，

週期和彈性係數及質量 M 的關係為 $(2\pi/T)^2=K/M= kQ^2/2Md^3$

$\rightarrow M= k(TQ)^2/8\pi^2d^3$

(b) 球殼和實心球有相同的電位公式，中央大球的電荷 $Q'=Q/2$，

面電荷密度為 $Q'/4\pi(2r)^2=Q/32\pi r^2$

【第三題參考解】

a. OP 經 L_1 成像

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{12}\longrightarrow s_1'=-24(\text{cm}),\quad m_1=-\frac{-24}{8}=+3$$

再經 L_2 成像

$$\frac{1}{6-(-24)}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{6}\longrightarrow s_2'=\frac{15}{2}=7.5(\text{cm}),\quad m_2=-\frac{7.5}{30}=-\frac{1}{4}$$

可知，像位於 L_2 右方 7.5cm 處，即位於物體右方 21.5cm 處。

b. 橫向放大率 $m=m_1\cdot m_2=3\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}$

$\longrightarrow$ 像高為 $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{8}=-0.375(\text{cm})\longrightarrow$ 倒立，0.375cm。

c. O 點與 L_1 邊緣形成的夾角 $\theta_{L_1}=\tan^{-1}\left(\frac{0.5}{8}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{16}\right)$

求 O 點與 A_1 邊緣形成的夾角，A_1 需先對 L_1 成像

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{s_{A_1}}=\frac{1}{12}\longrightarrow s_{A_1}=-4\longrightarrow \text{像距物}8+4=12(\text{cm}), m_{A_1}=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \theta_{A_1}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}}{12}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right)$$

求 O 點與 L_2 邊緣形成的夾角，L_2 需先對 L_1 成像

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{s_{L_2}}=\frac{1}{12}\longrightarrow s_{L_2}=-12(\text{cm})\longrightarrow \text{像距物}8+12=20(\text{cm}), m_{L_2}=-\frac{-12}{6}=+2$$

$$\therefore \theta_{L_2}=\tan^{-1}\left(\frac{0.5\times 2}{20}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$$

求 O 點與 A_2 邊緣形成的夾角，A_2 需先對 L_2 成像，再對 L_1 成像

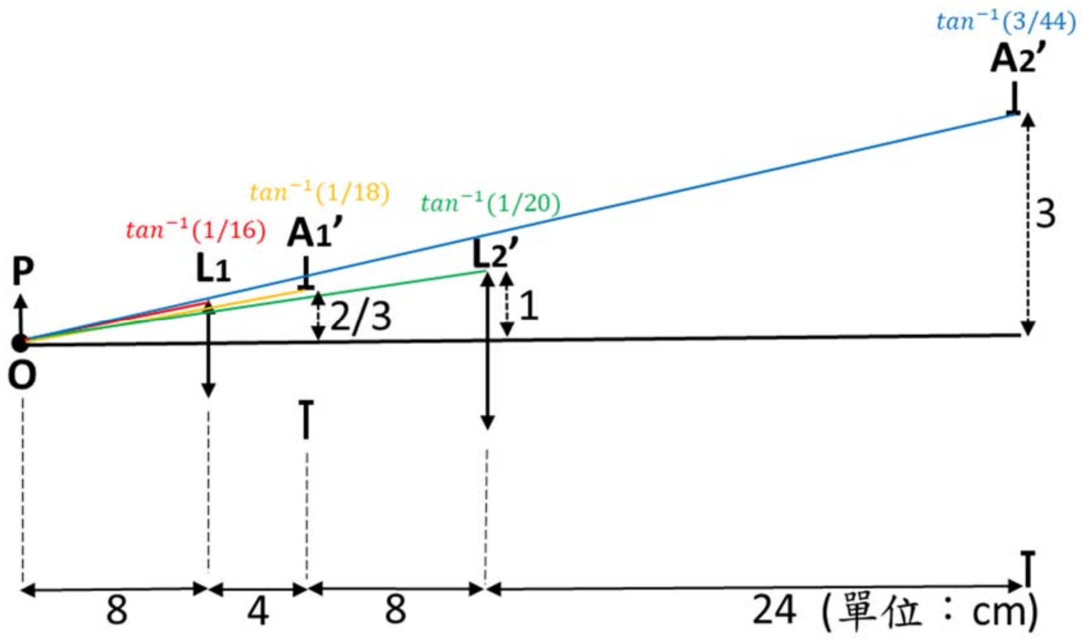
A_2 對 L_2 成像，$\frac{1}{2}+\frac{1}{s'_{A_2}}=\frac{1}{6}\longrightarrow s'_{A_2}=-3, m_1=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$

再對 L_1 成像，$\frac{1}{6-(-3)}+\frac{1}{s''_{A_2}}=\frac{1}{12}\longrightarrow s''_{A_2}=-36$

$$\longrightarrow \text{物右方 } 44\text{ cm}, m_2=-\frac{-36}{9}=+4\longrightarrow m_1\cdot m_2=\frac{3}{2}\times 4=+6$$

$$\therefore \theta_{A_2}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\times 6}{44}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{44}\right)$$

四個角度中 $\theta_{L_2}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ 最小 $\longrightarrow \theta_{\max}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$



tan⁻¹(3/44)
A2'
tan⁻¹(1/18)
tan⁻¹(1/20)
tan⁻¹(1/16)
A1'
L1
L2'
P
3
1
2/3
O
8
4
8
24（單位：cm)

【第四題參考解】

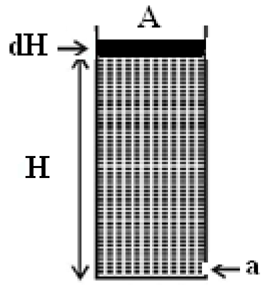
V = 340 m/s　單邊開口管的共鳴的基頻(fundamental frequency)條件為
$V/4L_0 = 212.5$　　L_0 為空氣管的長度
代入得 $L_0 = 340/(4 * 212.5) = 0.4$m

在單邊開口的空氣管中，只有單數的諧波(harmonic)才能存在
所以　其它可以共鳴的頻率為

$n*(V/4L_n) = 212.5$　　n = 3, 5, 7, 9, ………
分別代入可得
$L_3 = 1.2$m(3rd Harmonic)　　$L_5 = 2.0$m (5th harmonic)　$L_7=2.8$m (7th harmonic)
$L_9=3.6$m (9th harmonic)

所以總共可以聽到 5 次聲音的共鳴（包括只剩下空氣柱）

也就是水柱高為 3.6-0.4= 3.2m　3.6-1.2 = 2.4m　3.6-2.0 = 1.6m　3.6-2.8 = 0.8m 跟 0 時會有共鳴



因為水的不可壓縮，水密度相同　所以水流量守恆　（每單位時間流過面的水量相同）
如右圖

則 $\frac{-\rho A dH}{dt} = \rho a V_2$

→ $A(-dH/dt) = a V_2$　　H 為向上為正
(V_2 為小孔出水的速率)

且因為水沒有黏滯性即能量不會因為跟管壁有摩擦而損耗（能量守恆）
所以

在上端的總能為 $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g H$，

其中 $v = dH/dt = -a/A\, V_2$

在底端的總能為 $\frac{1}{2}\rho v_2^2$

因為 $A = \pi(2 \times 10^{-2})^2 = 1.26 \times 10^{-3}\ m^{-2}$
$a = \pi(10^{-3})^2 = 3.14 \times 10^{-6}\ m^2$

所以　$a/A \sim 1/1000$　所以　v 可以看是～0　　→ $\rho g H = \frac{1}{2}\rho V_2^2$

所以　$\mathbf{v_2 = \sqrt{2gH}}$

因此

$$a\sqrt{2gH} = \mathrm{A}\left(\frac{-dH}{dt}\right)$$

也就是說管中的水隨時間的下降為

$$-\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{a}{A}\sqrt{2gH}$$

代入 a, A, g

$$-\left(\frac{dH}{dt}\right) = 1.11 \times 10^{-2}\sqrt{H}$$

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -1.11\times10^{-2}\,dt$$

聽到第一個共鳴所需時間為

$$\int_{3.6}^{3.2}\frac{dH}{H} = -1.11 \times 10^{-2}\int_{0}^{t} dt$$

$$2\left(\sqrt{3.2} - \sqrt{3.6}\right) = -(1.11 \times 10^{-2})t$$

t~ 19.5 s

聽到第 2 個共鳴所再需時間為

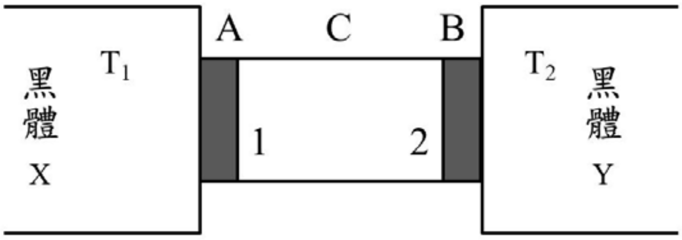
$$\int_{3.2}^{2.4}\frac{dH}{H} = -1.11 \times 10^{-2}\int_{0}^{t} dt$$

$$2\left(\sqrt{2.4} - \sqrt{3.2}\right) = -(1.11 \times 10^{-2})t$$

t~ 43 s

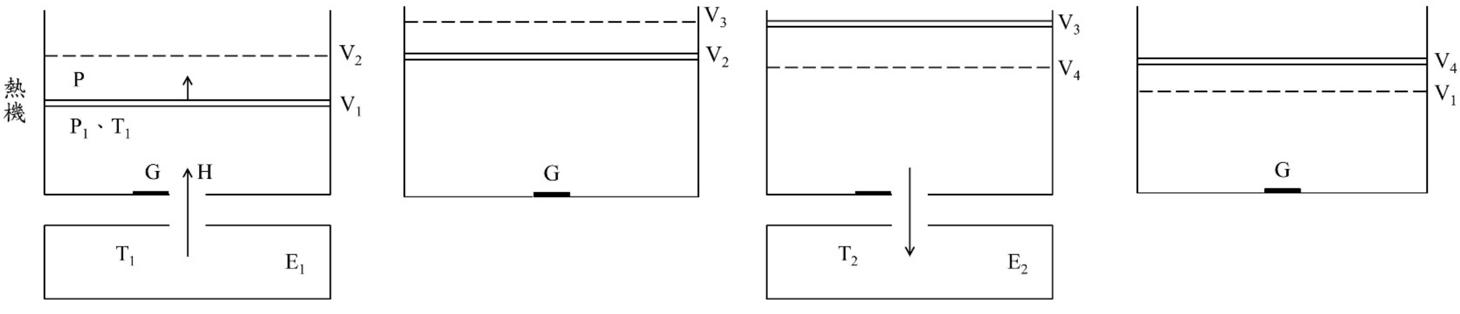
【第五題參考解】

(a) 設有兩個黑體 X 和 Y，平衡溫度分別為 T_1 和 T_2，且 $T_1 > T_2$，C 為連接兩個黑體的真空圓筒，筒中有兩個自由滑動的活塞 A、B，圓筒內壁和活塞 A、B 的兩個平面都是理想的反射面，最初活塞 A 和 B 的平面分別貼緊於黑體 X 和 Y 的位置 1 和 2。

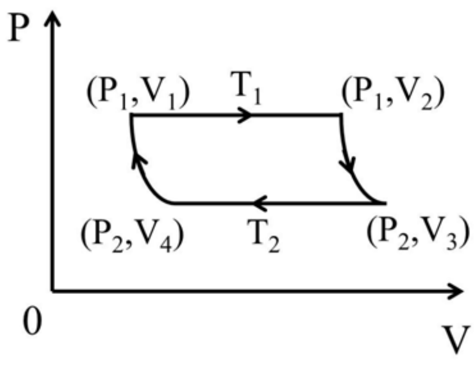


先將 B 移出筒 C，讓黑體 Y 的輻射能充滿 C，再將 B 移回到位置 2，並把 A 移出筒 C 然後推動活塞 B，如果沒有光壓，推動 B 時，外界不需作功，當 B 移到位置 1 時，筒 C 的輻射能全部被黑體 X 吸收。此時，筒中又充滿了黑體 Y 的輻射能，把活塞 A 和 B 輪流移入和移出，重複上述過程，黑體 Y 的輻射能不斷地被黑體 X 吸收而使得黑體 X 之溫度上升、黑體 Y 之溫度下降。這樣相當於能量自發地從低溫熱源（黑體 Y）流入高溫熱源（黑體 X），而不引起其他變化，這顯然違反熱力學第二定律的克勞修斯表述。上述實驗事實的理論解釋，錯誤在於沒有考慮輻射對活塞平面產生的光壓，若把光壓納入考慮，在推動活塞時外界必須作功。因此輻射場中必存在光壓。

(b) 熱機以熱輻射為工作物質，熱機有光滑無摩擦的活塞 P、活門 G 和底部小孔 H，可讓熱輻射進出熱機。



進行微卡諾循環：



當熱輻射（光子）為工作物質時，$P=\frac{1}{3}u(T)$，等溫線亦為等壓線。

1. 等溫膨脹過程（isothermal expansion）：

   活門 G 開啟，熱機自溫度 T_1 的平衡熱輻射源 E_1 吸收熱輻射，輻射壓 $P_1=\frac{1}{3}u(T_1)$，

   體積自 V_1 膨脹到 V_2，對外作功 $W_1=P_1(V_2-V_1)=\frac{1}{3}u(T_1)\cdot(V_2-V_1)$，

   內能增加 $\Delta U=u(T_1)\cdot(V_2-V_1)$，由熱力學第一定律：熱機自 E_1 吸收輻射能

   為 $Q_1=W_1+\Delta U=\frac{4}{3}u(T_1)\cdot(V_2-V_1)$
2. 絕熱膨脹過程（adiabatic expansion）：
   活門 G 關閉，體積自 V_2 絕熱膨脹到 V_3，溫度降到 T_2、輻射壓降到
   $P_2=\frac{1}{3}u(T_2)$
3. 等溫壓縮過程（isothermal compression）：
   活門 G 開啟，體積自 V_3 等溫壓縮到 V_4，熱機對溫度 T_2 的熱輻射源 E_2 釋出熱輻射。
4. 絕熱壓縮過程（adiabatic compression）：
   活門 G 關閉，體積自 V_4 絕熱壓縮回到 V_1，溫度回升到 T_1。

設 T_1 和 T_2 之間微差 $\mathrm{d}T$，V_1 和 V_2 之間微差 $\mathrm{d}V$，

熱機對外作功 $W=\mathrm{d}P\cdot\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}V$

熱機自 E_1 吸收的熱輻射 $Q_1=W_1+\Delta U=\frac{4}{3}u(T_1)\cdot(V_2-V_1)=\frac{4}{3}u(T_1)\mathrm{d}V$

$\Rightarrow$ 熱機效率 $\eta=\dfrac{W}{Q_1}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}V}{\frac{4}{3}u\cdot\mathrm{d}V}=\dfrac{\mathrm{d}u}{4u}$

又由卡諾定理（Carnot's theorem）知熱機效率為 $\eta=\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$

$\therefore\dfrac{\mathrm{d}u(T)}{4u(T)}=\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$，兩邊積分得：$\int\dfrac{\mathrm{d}u(T)}{4u(T)}=\int\dfrac{\mathrm{d}T}{T}\ \Rightarrow\ln u(T)=\ln aT^4$

得：$u(T)=aT^4$，其中 a 為常量。　　　　Q.E.D.

(c) 地球接收到太陽之輻射能流

$$\dot{q}_{\mathrm{SE}}=\left(aT_{\mathrm{S}}^{4}\right)\left(4\pi R_{\mathrm{S}}^{2}\right)\cdot\frac{\pi R_{\mathrm{E}}^{2}}{4\pi r_{\mathrm{SE}}^{2}}\left[1-\left(-\varepsilon_{\mathrm{E}}\right)\right]=2.69\times10^{17}\ \mathrm{J/s}$$

$\therefore$ 地表所受到太陽的輻射壓之總力為 $F=\dfrac{\dot{q}_{\mathrm{SE}}}{c}=\dfrac{2.69\times10^{17}}{3.0\times10^{8}}=8.98\times10^{8}\ \mathrm{N}$

(d) 將地球、海王星視為灰體，根據克希何夫熱輻射定律（Kirchhoff's law of thermal radiation），吸收率與發射率相等。

熱平衡條件：

$$\left(aT_{\mathrm{S}}{}^{4}\right)\left(4\pi R_{\mathrm{S}}{}^{2}\right)\cdot\frac{\pi R_{\mathrm{E}}{}^{2}}{4\pi r_{\mathrm{SE}}^{2}}\left(1-\varepsilon_{\mathrm{E}}\right)=\left(aT_{\mathrm{E}}{}^{4}\right)\left(4\pi R_{\mathrm{E}}{}^{2}\right)\left(1-\varepsilon_{\mathrm{E}}\right)$$

$$\Rightarrow T_{\mathrm{E}}=\sqrt[4]{\frac{R_{\mathrm{S}}{}^{2}}{4r_{\mathrm{SE}}^{2}}}T_{\mathrm{S}}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}\left(\frac{7.0\times10^{8}}{1.5\times10^{11}}\right)^{2}}\times6000\approx290\mathrm{K}$$

$$\left(aT_{\mathrm{S}}{}^{4}\right)\left(4\pi R_{\mathrm{S}}{}^{2}\right)\cdot\frac{\pi R_{\mathrm{N}}{}^{2}}{4\pi r_{\mathrm{SN}}^{2}}\left(1-\varepsilon_{\mathrm{N}}\right)=\left(aT_{\mathrm{N}}{}^{4}\right)\left(4\pi R_{\mathrm{N}}{}^{2}\right)\left(1-\varepsilon_{\mathrm{N}}\right)$$

$$\Rightarrow T_{\mathrm{N}}=\sqrt[4]{\frac{R_{\mathrm{S}}{}^{2}}{4r_{\mathrm{SN}}^{2}}}T_{\mathrm{S}}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}\left(\frac{7.0\times10^{8}}{4.5\times10^{12}}\right)^{2}}\times6000\approx53\mathrm{K}$$