教育部 111 學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（二）參考解

【第一題參考解】

恢復系數＝1，代表二球相撞時為完全彈性碰撞

(a) A 點球上升至最高點時，末速＝0，並假設上升的時間為t_A

所以 $0 = v_0 - gt_A$ ➔ $t_A = \frac{v_0}{g}$

B 點的球從 B 點移動到 A 點的距離為x_2，B 球水平移動速度為 $v_0' \cos\theta$ ，水平移動為等速度運動，假設 B 球水平移動時間為t_B

$$v_0' \cos\theta = x_2 \text{，} t_B = \frac{x_2}{v_0' \cos\theta}$$

B 點等待t_{wait} 後才射球 $\rightarrow t_B + t_{wait} = t_A \rightarrow t_{wait} = t_A - t_B = \frac{v_0}{g} - \frac{x_2}{v_0' \cos\theta}$

(b) 當 A 球上升至最高點與 B 球剛好發生水平正向碰撞時$(m_1 = m_2)$，

$$v'_{A_{水平速度}} = \frac{(m_1 - m_2)v_{A_{水平速度}} + 2m_2 v_{B_{水平速度}}}{m_1 + m_2} = \mathrm{v}_{\mathrm{B}_{水平速度}} = \mathrm{v}_0'\cos\theta$$

A 球水平方向飛到橄欖球門的時間為 t_A'

$\because v_0' \cos\theta \times t_A' = x_1$

$\therefore t_A' = \frac{x_1}{v_0' \cos\theta}$

A 球垂直上拋到最高處被擊中，落到橄欖球門時的位置時必須要高於 3m 才能夠穿過球門，假設 A 球垂直下落的距離 h_A

$$h_A = \frac{1}{2} g \times t^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{x_1}{v_0' \cos\theta}\right)^2 \geq v_0 \times t_A - \frac{1}{2} g \times t_A^2 - 3 = \frac{v_0^2}{2g} - 3$$

A 球與 B 球高度需滿足的條件為 $\frac{g}{2}\left(\frac{x_1}{v_0' \cos\theta}\right)^2 \geq \frac{v_0^2}{2g} - 3$

【第二題參考解】

(a) 由於導體球接地，因此球面上的電位為零。

若 P為球面上任意一點，O為導體球的球心，POq 的夾角為 θ。

設 $|\overrightarrow{qP}| = r_1$，$|\overrightarrow{q'P}| = r_2$，則 $r_1^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta$，

$r_2^2 = R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\theta$

P 點的電位為 $V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right) = 0$，所以 $\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} = 0$。

$$q^2 r_2^2 = q'^2 r_1^2$$

因此 $q^2(R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\theta) = q'^2(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta)$

因為導體球為等電位面，因此上式對任何的角度 θ 都必須成立

比較係數得到

$$\begin{cases} q^2(R^2 + d'^2) = q'^2(R^2 + d^2) \\ q^2(Rd') = q'^2(Rd) \end{cases}$$

可以解得 $\begin{cases} d' = \frac{R^2}{d} \\ q' = -\frac{qR}{d} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d' = d \\ q' = -q \end{cases}$（不合，故捨棄）

(b) 作用在點電荷 q 的靜電力大小為

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(d-d')^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(-\frac{qR}{d})}{(d-\frac{R^2}{d})^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Rd}{(d^2-R^2)^2}$$

此靜電力為吸引力

(c) 兩個相互接觸的導體球彼此間存有相互感應的問題，在此題中，我們可以利用鏡像法，當系統電位給定時，設法求出帶電量，這樣就可以得到系統的電容。將左右兩球分別稱為 L 球以及 R 球。今假設在兩球的球心各有一個帶電量均為 q_1 的點電荷。當不考慮彼此間的相互感應時，兩球的電位分別為 $V_0 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}$。

但是由於存在相互感應，感應電荷會造成額外的附加電位，使系統的電位偏離 V_0。為了消除附加電位的影響，使系統的電位保持在 V_0，需要在各自對方的球體內放置一個像電荷。此像電荷的位置以及電量可利用(a)的結果得到（此時 $d = 2R$）

$$\begin{cases} d_2 = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \\ q_2 = -\frac{Rq_1}{2R} = -\frac{q_1}{2} \end{cases}$$

因此 L 球中的像電荷 q_2 正好消除掉 R 球球心處點電荷 q_1 對 L 球的感應所產生的電位的改變。而且根據問題的對稱性，R 球中的像電荷 q_2 也正好消除掉 L 球球心處點電荷 q_1 對 R 球的感應所產生的電位的改變。然而， 因為像電荷 q_2 的引進，又會對各自的導體球產生新的感應，又會再產生新的附加電位。為了消除這個新產生的附加電位，必須要在各自的球體內再次引進 q_2 的像電荷 q_3，此像電荷的位置及帶電量分別為

$$\begin{cases} d_3 = \dfrac{R^2}{2R - d_2} = \dfrac{2R}{3} \\ q_3 = -\dfrac{Rq_2}{2R - d_2} = \dfrac{q_1}{3} \end{cases}$$

利用類似的推論，q_3 的引進能夠消除各自對方球體內 q_2 所帶來對導體球電位的改變，但與此同時又會對各自對方導體球產生新的附加電位。為了消除新產生的附加電位，必須再引入新的像電荷 q_4，此像電荷的位置及帶電量分別為

$$\begin{cases} d_4 = \dfrac{R^2}{2R - d_3} = \dfrac{3R}{4} \\ q_4 = -\dfrac{Rq_3}{2R - d_3} = -\dfrac{q_1}{4} \end{cases}$$

如此不斷重複類似過程，可以發現

$$\begin{cases} d_n = \dfrac{(n-1)R}{n} \\ q_n = (-1)^{n-1}\dfrac{q_1}{n} \end{cases}$$

上式結果可由數學歸納法予以證明($\mathrm{n} = 1,2,3,4$ 均成立)

$$d_{n+1} = \frac{R^2}{2R - d_n} = \frac{R^2}{2R - \dfrac{n-1}{n}R} = \frac{n}{n+1}R$$

$$q_{n+1} = -\frac{R}{2R - d_n}q_n = -\frac{R}{2R - \dfrac{n-1}{n}R}(-1)^{n-1}\frac{q_1}{n} = \frac{(-1)^n}{n+1}q_1$$

因此，當 $n \to \infty$ 時，$q_n \to 0$，額外電位修正的效果趨近於零。因此在系統的電位 V_0 保持不變的情形下，兩導體球的總帶電量為

$$Q = 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{q_1}{n}$$

$$= 2q_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 2q_1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = 2q_1\,ln\,2$$

所以此系統的電容為 $C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2q_1\,ln\,2}{\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 8\pi\varepsilon_0 R\,ln\,2$

【第三題參考解】

(a) $I_1 = \frac{1}{2} I_0$

(b) 0

(c) $I_1 = \frac{1}{2} I_0$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha$$

$$I_3 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha \cos^2\beta = \frac{1}{8} I_0 \sin^2(2\alpha)$$

最大值可在 α=45 度時得到

(d) 司乃耳定律（Snell`s Law）

$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$

n_2 大

(e) (e-1)

p-與 *s*-線偏振光的反射係數

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \qquad r_s = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

p-與 *s*-線偏振光的反射強度

$$R_p = (r_p)^2 = \frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)} \qquad R_s = (r_s)^2 = \frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

當反射光只有 s-線偏振光時，$R_p = (r_p)^2 = \frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)} = 0$，可成立條件有：

(1) $\tan^2(\theta_1 - \theta_2)$=0 使得$\theta_1 = \theta_2$

（事實上，$n_1 \neq n_2$，所以角度不可能相等，不考慮此解）

(2) $\tan^2(\theta_1 + \theta_2) = \infty$ 使得 $\theta_1 + \theta_2 = 90^o$ …… 得證

(e-2)

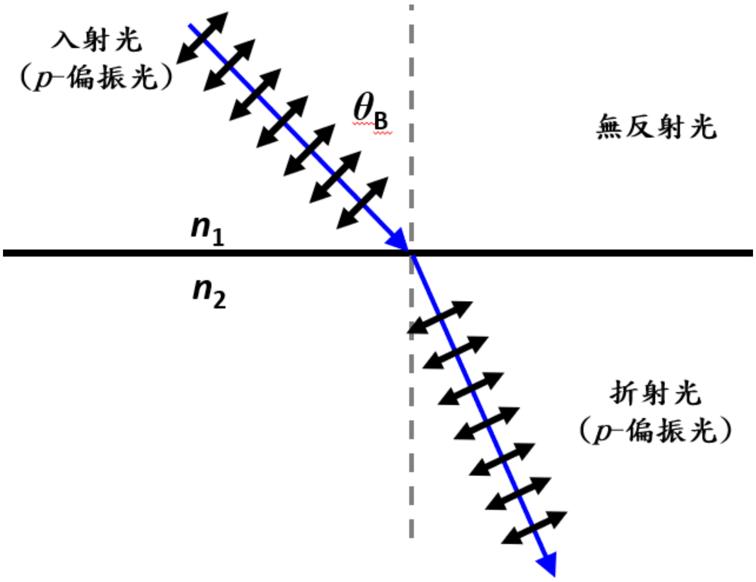
結合$\theta_1 + \theta_2 = 90^o$

與$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$

得知$n_1 sin\theta_B = n_2 \sin(90^o - \theta_B) = n_2 cos\theta_B$

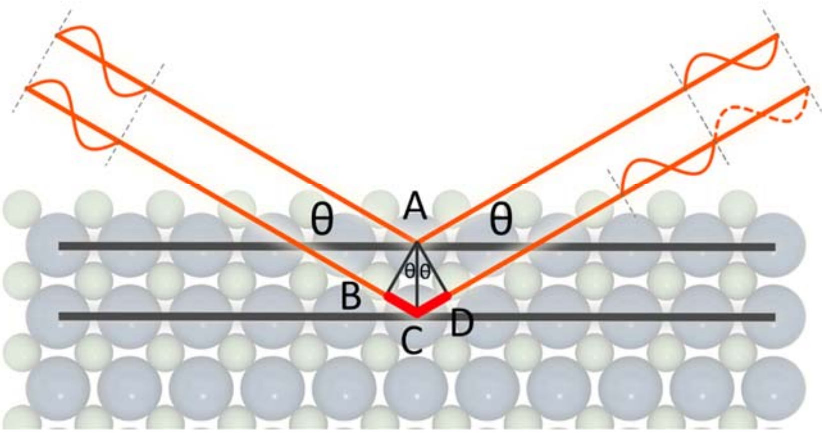
所以$\theta_B = tan^{-1}(\frac{n_2}{n_1})$

(f)



【第四題參考解】

(a) (Bragg's Law)



在有序排列的晶體當中，不同原子層晶面間的間距固定，入射光可以被任何一層原子而反射，但只有入射光行經距離為波長的整數倍時可以互相作用形成建設性干涉，由上圖，被第一層原子反射和被二層原子反射的光之光程差為 BC+CD，且 $BC+CD=n\lambda$ 。又 $BC=CD=d\sin\theta$，故 $n\lambda=2d\sin\theta$。

(b) 根據 Bragg's Law 及實驗的幾何，得到建設性干涉的條件為

$n\lambda=2d\sin(90^o-\varphi/2)$

$n=1$, $\varphi=50^o$, $d=0.091$ nm 代入可得 $\lambda=0.165$ nm

(若不能帶計算機可給 $\sin50^o$, $\sin25^o$, $\sin65^o$, $\sin40^o$ 讓學生挑選代入)

(c) $p=(2mKE)^{1/2}=[(2)(9.1*10^{-31}\ kg)(54\ eV)(1.6*10^{-19}\ J/eV)]^{1/2}=4.0*10^{-24}\ kg.m/s$

$\lambda=h/p=(6.63*10^{-31}\ J.s)/(\ 4.0*10^{-24}\ kg.m/s)=1.66*10^{-10}\ m=0.166\ nm$

【第五題參考解】

(a) 1 to 2 : $\Delta W_{12} = 0$，

2 to 3 : $\Delta W_{23} = nRT \ln(V_3/V_2) = 8.3145 \times 400 \times \ln 5$ J $= 5.353 \times 10^3$J，

3 to 4 : $\Delta W_{34} = 0$，

4 to 1 : $\Delta W_{41} = nRT \ln(V_1/V_4) = 8.3145 \times 300 \times \ln(1/5)$ J $= -4.015 \times 10^3$J，

(b) 1 to 2 : $\Delta Q = \Delta U_{12} = C_V \Delta T = 3/2\, nR \times \Delta T = 1.5 \times 8.3145 \times 100$ J $= 1.247 \times 10^3$ J，

2 to 3 : $\Delta Q = \Delta W_{23} = nRT \ln(V_3/V_2) = 8.3145 \times 400 \times \ln 5$ J $= 5.353 \times 10^3$J，

3 to 4 : $\Delta Q = \Delta U_{34} = C_V \Delta T = 3/2\, nR \times \Delta T = 1.5 \times 8.3145 \times (-100)$ J $= -1.247 \times 10^3$J，

4 to 1 : $\Delta Q = \Delta W_{41} = nRT \ln(V_1/V_4) = 8.3145 \times 300 \times \ln(1/5)$ J $= -4.015 \times 10^3$J，

(c) 性能係數 $= Q_{\text{in}} / \Delta W_{\text{out}} = [(1.247+5.353) \times 10^3 \text{ J}] / [(5.353-4.015) \times 10^3 \text{J}] =$ 1.338/6.600/1.338 = 4.933

(一般的性能係數定義 $= \Delta W_{\text{out}} / Q_{\text{in}} = [(5.353-4.015) \times 10^3 \text{J}] / [(1.247+5.353) \times 10^3 \text{ J}] =$ 1.338/6.600=0.2027)

(d) 否。定容過程中，因為接觸熱庫，溫度變化非準靜過程，造成不可逆過程。或是一個熱循環的熵大於零。

(可逆熱機 $\Delta W_{\text{out}} / Q_{\text{in}} = 1 - T_1/T_2 = 0.25$，不可逆過程將導致 $\Delta W_{\text{out}} / Q_{\text{in}}$ 小於可逆熱機。)