

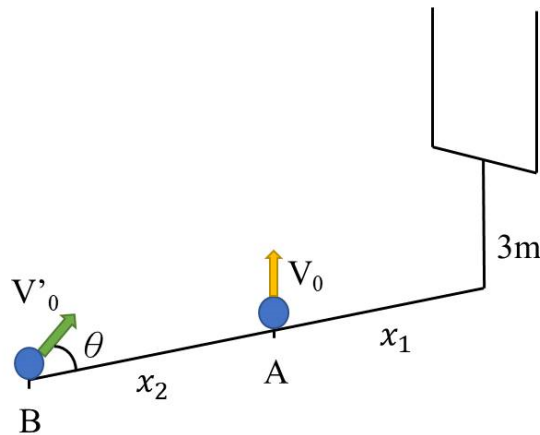
筆試試題（二）

編號：__01__.

- 說明：(1) 請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
(2) 本試題卷共五大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，
試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

圖(一)為一橄欖球場地，分別在 A、B 二點放置二顆質量為 m 的圓形橡皮彈力球（恢復系數皆等於 1），A 點的橡皮球以 V_0 的速度從地面垂直上拋後，B 點的橡皮球則以 V'_0 與地面夾角 θ 斜向射出，並在空中擊中 A 點上拋的球，以使得 A 點的球恰好可以通過 3m 高度的球門。

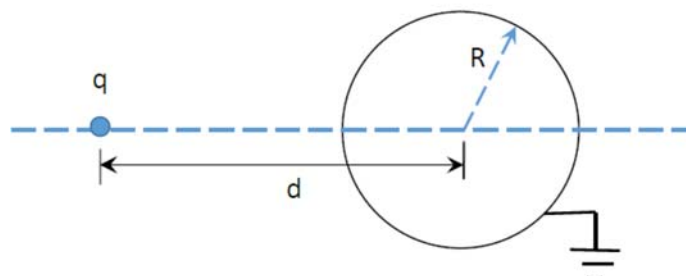


▲圖(一)

- (a) 試問 B 球需等待多久射出，B 球才能正好擊中上拋至最高點位置的 A 球。
[12 分]
- (b) 承問題(a)，假設 B 球正好水平正向的碰撞 A 球，A 球剛好可以通過 3m 高的球門，請求出滿足 A 球與 B 球發生碰撞的條件。 [18 分]

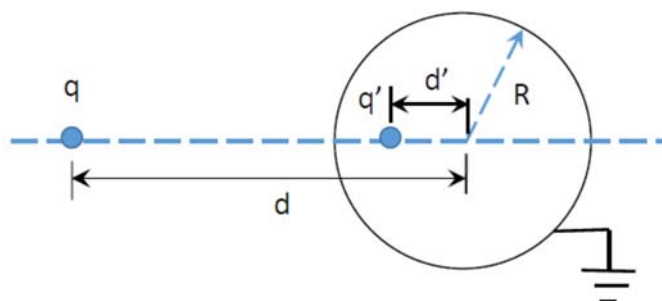
【第二題】

半徑為 R 的接地導體球附近有一電量為 q 的點電荷，如圖(二)所示。點電荷 q 會在導體球表面引起感應電荷的分布。直接從導體球表面所產生的感應電荷來計算其周圍空間的電場和電位分布並不是一件容易的事情。



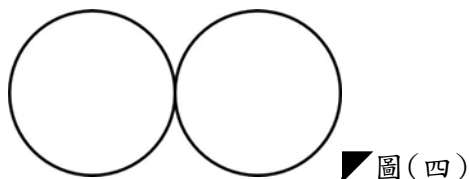
▲圖(二)

但是這種複雜的計算可以利用所謂的"鏡像法"予以簡化。根據鏡像法的原理，導體球面上的感應電荷所產生的電場和電位可以用放置於導體球內的點電荷 q' (也稱為像電荷)所產生的電場和電位來代替。需要注意的是:這個像電荷 q' 產生的電場和電位僅在導體球外(也包括球面)與導體球面上的感應電荷所產生的電場和電位相同。由本問題的對稱性可知，像電荷應該位於點電荷 q 與導體球心的連線上，如圖(三)所示。



▲圖(三)

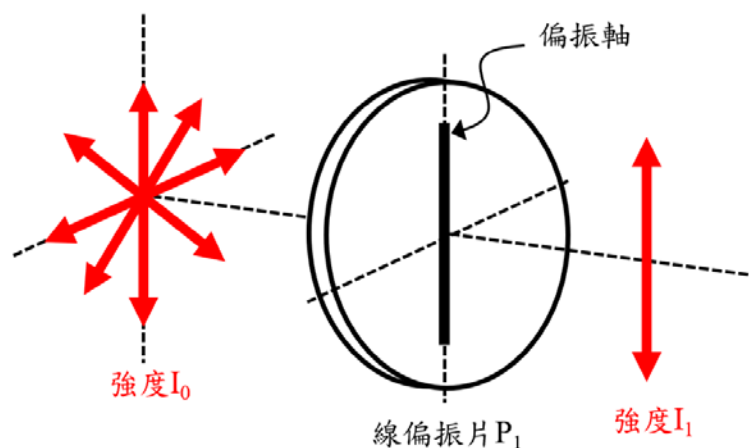
- 試求像電荷電量 q' 以及其到導體球球心的距離 d' 。 [12分]
- 求作用在電荷 q 上的靜電力。 [6分]
- 現在將兩個半徑同為 R 導體球相互接觸，形成一孤立的雙球導體系統，如圖(四)所示。



已知孤立導體系統的電容等於系統的帶電量與其電位的比值。試求此系統的電容。 [12分]

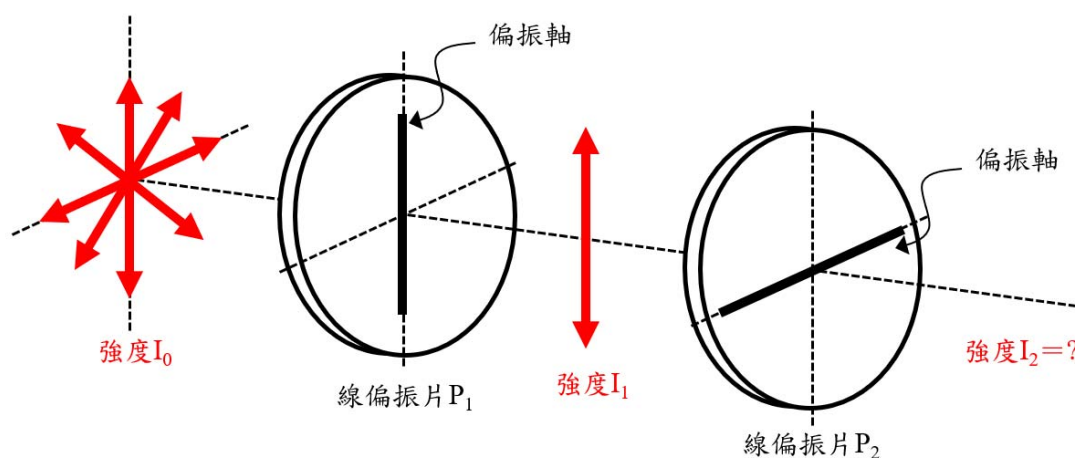
【第三題】

- (a) 電磁波的偏振方向定義為其電場的震盪方向。光是一種電磁波，不具特定偏振方向的光被稱為非偏振光。當非偏振光穿過線偏振片後，只有電場振動方向與線偏振片之偏振軸平行的光才有辦法通過偏振片，因此產生了線偏振光。如下圖(五)，在不考慮通過線偏振片時的吸收與反射的前提之下，強度 I_0 的非偏振光在穿過線偏振片 P_1 後，線偏振光的強度 I_1 為多少 I_0 ? [3分]



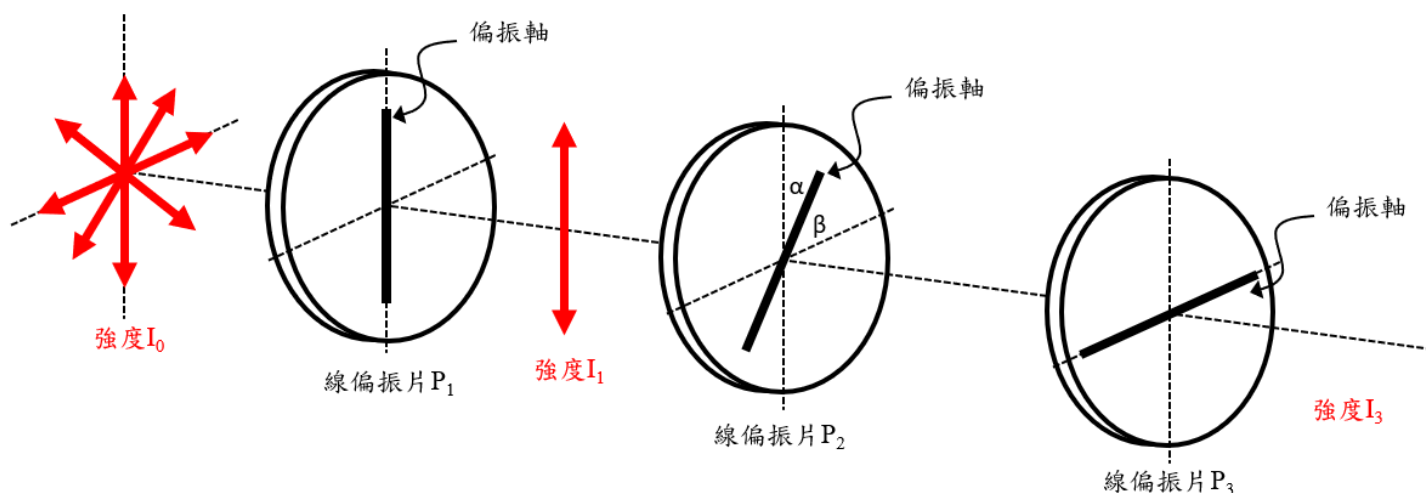
▲圖(五)

- (b) 馬呂斯定律表明了，強度 I 的線偏振光穿過線偏振片後，且不考慮在通過線偏振片時的吸收與反射，穿透過線偏振片的光強度為 $I' = I\cos^2\theta$ ，其中 θ 是入射線偏振光的偏振方向和偏振片之偏振軸之間的夾角。如下圖(六)，若在(a)小題中的裝置後再加入一個線偏振片 P_2 ，而 P_2 的偏振軸與 P_1 的偏振軸垂直。光穿過線偏振片 P_2 後，線偏振光的強度 I_2 為多少 I_0 ? [3分]



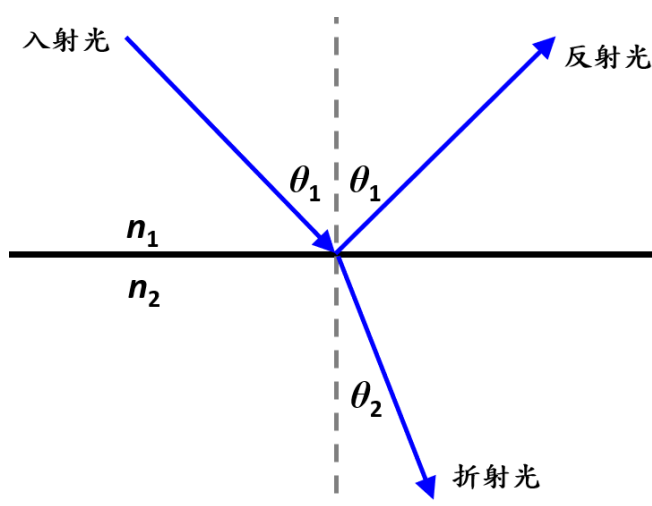
▲圖(六)

- (c) 如下圖(七)所示之裝置，若在偏振軸互相垂直的兩個線偏振片(P_1 與 P_3)之間再加入一個線偏振片 P_2 ，且 P_2 的偏振軸與垂直軸夾 α 角度，而與水平軸夾 β ($= 90^\circ - \alpha$)角度。請問，如何設計夾角 α 使得最後穿透過 P_3 的強度 I_3 可以最大？此時，強度 I_3 為多少 I_0 ？ [5分]



▲圖(七)

- (d) 當光由透明介質 1(折射率 n_1)以非垂直的方向傳播到透明介質 2(折射率 n_2)時會發生折射，如下圖(八)。 θ_1 是入射角， θ_2 是折射角。此時會遵守什麼定律？其數學關係為何？此圖中顯示的是 n_1 數值大還是 n_2 的數值大？ [3分]



▲圖(八)

- (e) 當考慮光的偏振時，圖(八)更可以表達成下頁圖(九)。入射光表示成兩個正交線性偏振態， p -線偏振光和 s -線偏振光。 p -線偏振光的電場偏振平行於入射平面，而 s -線偏振光垂直於入射平面。一般情況下，反射光和折射光都是

部分偏振光。菲涅爾方程式(Fresnel equations)就是用來描述光在兩種不同折射率的介質中傳播時的反射和穿透，尤其是，對 p -線偏振光和 s -線偏振光而言，菲涅爾方程式描述了反射波振幅與入射波振幅的比值(反射係數)，以及穿透波振幅與入射波振幅的比值(穿透係數)。

$$p\text{-線偏振光的反射係數 } r_p = \frac{n_1 \cos(\theta_2) - n_2 \cos(\theta_1)}{n_1 \cos(\theta_2) + n_2 \cos(\theta_1)}$$

$$s\text{-線偏振光的反射係數 } r_s = \frac{n_1 \cos(\theta_1) - n_2 \cos(\theta_2)}{n_1 \cos(\theta_1) + n_2 \cos(\theta_2)}$$

$$p\text{-線偏振光的穿透係數 } t_p = \frac{2n_1 \cos(\theta_1)}{n_1 \cos(\theta_2) + n_2 \cos(\theta_1)}$$

$$s\text{-線偏振光的穿透係數 } t_s = \frac{2n_1 \cos(\theta_1)}{n_1 \cos(\theta_1) + n_2 \cos(\theta_2)}$$

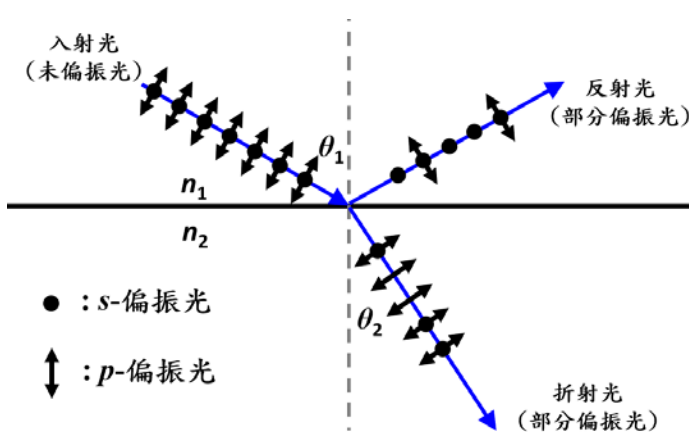
其中， p -與 s -線偏振光的反射係數更可以推導為

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad r_s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

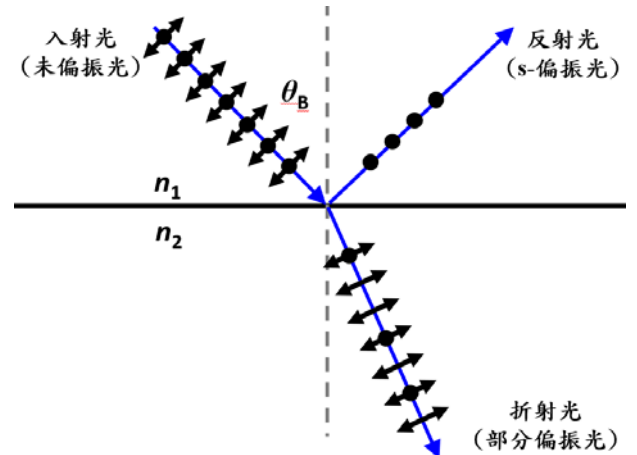
當入射角為某特定角度時，即布魯斯特角 θ_B (Brewster's angle)，反射光是 s -線偏振光，如圖(十)。請試著證實在此情況下：

(e-1) 反射光與折射光互相垂直。 [6分]

(e-2) $\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ [6分]



▲圖(九)



▲圖(十)

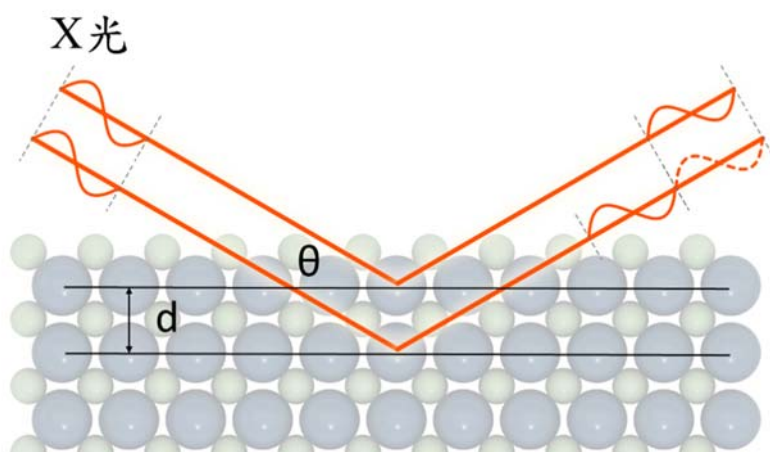
(f) 當光由透明介質 1 (折射率 n_1) 以非垂直的方向傳播到透明介質 2 (折射率 n_2) 時，要怎麼使用線偏振片來設計實驗以得到一個只有入射光與折射光，卻沒有反射光的狀況呢？ [4分]

【第四題】

繞射與干涉是波動特性的重要特徵，也在不論是近代物理的發展與材料科學的應用都扮演重要的腳色。如利用 X 光波動特性所開發設計的 X 光繞射儀(X ray diffraction, XRD)。是材料結構的鑑定的有力的實驗設備，可以透過已知波長的 X 光以及入射晶體後形成繞射的結果，來算出未知的原子層晶面間的間距為 d ，作為判斷材料結構的依據。

其原理如下圖(十一)所示，若以 X 光入射具有有序重複排列的原子組成的材料時，由於 X 光的波長與材料內部不同原子層晶面間的間距相近，因此會形成繞射。由於進入不同層晶面間的路徑不同，因此會形成光程差。繞射波疊加的結果使反射後的 X 光強度在某些角度上會有增強的結果。若原子層晶面間的間距為 d ，而入射光與晶面間的夾角為入射角 θ 。

(a) 請說明 X 光繞射儀所觀察到建設性的干涉條件為何？ [10 分]



▲圖(十一)

(b) 而上述的 X 光繞射的原理被稱之為布拉格定理(Bragg's Law)，後來也被應用在證明粒子具有波動特性的劃時代的實驗中。該實驗的裝置圖如圖(十二)所示，發現在加速電壓 54V 加速電子來轟擊具有有序重複排列的鎳晶體 ($d=0.091 \text{ nm}$)時。電子偵測器可以在散射角度 φ 為 50 度時，發現散射強度特別顯著。而此現象被認為是與布拉格繞射定理有關。而電子能顯現與 X 光一樣的繞射特性，也表示電子也具有波動的特性。證明了粒子的波動性也是量子理論中非常重要基石。

請計算此時電子的波長為何？ [10 分]



▲圖(十二)

電子波長與動量間的關係也可以透過德布洛伊(de Broglie)提出關係式 $\lambda=h/p$ 來計算，其中 λ 為波長、 h 為普朗克常數(Planck's constant)而 p 為電子的動量。

(c) 也請透過此關係計算電子的波長，並比較是否與上述實驗所得的波長相符。
[10分]

題目所需要用到的可能資訊：

電子質量= 9.1×10^{-31} kg

普朗克常數= 6.63×10^{-34} J·s

1 eV= 1.6×10^{-19} J

【第五題】

一熱機由一莫爾的理想單原子氣體在四個狀態之間循環進行(1→2→3→4)構成。

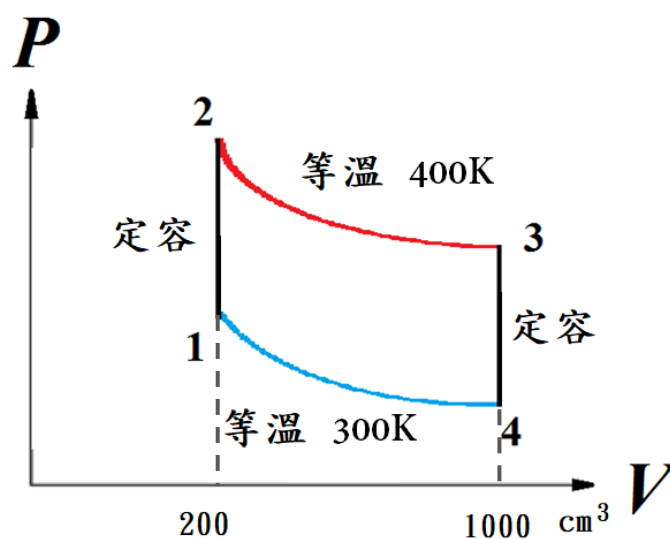
其中 $(T_1, V_1) = (300\text{K}, 200\text{cm}^3)$,

$(T_2, V_2) = (400\text{K}, 200\text{cm}^3)$,

$(T_3, V_3) = (400\text{K}, 1000\text{cm}^3)$,

$(T_4, V_4) = (300\text{K}, 1000\text{cm}^3)$ 。

四個狀態間由兩個等溫過程和兩個定容過程形成一個循環，如圖(十三)所示。



▲圖(十三)

請問 (a) 四個過程中做功各為多少？ [7分]

(b) 四個過程的熱流各為多少？ [7分]

(c) 求此熱機的性能係數，其定義為在每個循環之 $\frac{\text{輸入熱能}}{\text{輸出功}}$ 。 [8分]

(d) 此熱機是否為可逆循環？請說明你的理由。 [8分]

(提示：計算到3位有效位數。氣相滿足理想氣體方程式 $pV = nRT$ ，其中 p 為壓力， V 為氣相體積， n 為莫耳數， $R = 8.3145 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ 為氣體常數。)