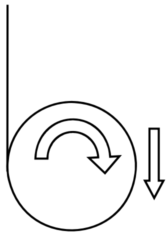
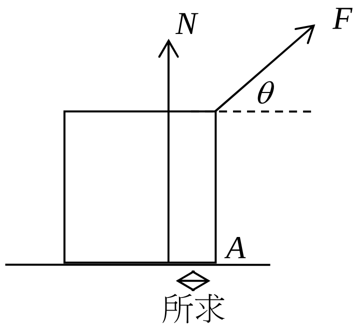
111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

【試題一】

(1)　我們可以設計一個簡單的模型來表達扯鈴或是溜溜球受到簡單外力向下滾動的現象。考慮圖中的圓柱，其轉動慣量為 MR^2，質量為 M，半徑 R，其上纏繞著繩子，手持繩子的一端自靜止釋放圓柱，則此圓柱將一邊滾動並一邊向下移動，試計算此圓柱向下移動的加速度為何？



(2)　地面靜摩擦係數為 0.75，如圖，施一方向可調整之力於正方形均質物體上，物體邊長為 L，質量為 m。若改變施力仰角，以最小施力使物體恰滑動時，此時地面對物體正向力的作用點，距離物體前緣 A 點有多遠？



(3)　在設計保齡球道時，我們會刻意拋光球道，使得球道的動摩擦係數很小，讓球足以自滑動過程慢慢才轉為純滾動狀態。將一質量為 M，球半徑 R，轉動慣量為 MR^2 的保齡球以對地 v_0 的速度平推入保齡球道，若球道的摩擦係數為 μ_k，球道長度為 d，已知球在到達球道終點前已轉為純滾動，試計算通過整個球道的時間為何？

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

試題一參考解

(1)
列出移動牛頓第二定律：
$Mg - T = Ma$
列出轉動牛頓第二定律：
$TR = I\alpha$
列出移動與轉動的關係式：$a = \alpha \times R$
解聯立可求出 $a = \dfrac{g}{2}$

(2)
先計算施力最小值：
x：$F\cos\theta = \mathrm{f}_{smax} = \mu_s N$
y：$F\sin\theta + N = mg$
解聯立可得 $F = \dfrac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$ ，$N = mg - \dfrac{\mu_s mg \sin\theta}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$
其施力最小值在分母達到最大，也就是 $\tan\theta = \mu_s$ ，故此時施力仰角為 37 度。

以物體下緣中點為參考點，分析物體合力矩為零：$\tau_F = \tau_N$
$$(F\cos 37°\cdot L - F\sin 37°\cdot \frac{L}{2}) = (mg - \frac{\mu_s mg \sin 37°}{\cos 37° + \mu_s \sin 37°})\cdot x$$
可得 $x = \dfrac{15}{32}L$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

試題一參考解

(3)
球最初滑動時受到地面動摩擦力，讓移動速度變慢，轉動速度變快，一直到純滾動狀態時，地面摩擦力為零，球等速度運動。

減速移動：$f_k = Ma \qquad \Rightarrow a = \mu_k g$

加速轉動：$f_k R = I\alpha \qquad \Rightarrow \alpha = \dfrac{\mu_k MgR}{MR^2} = \dfrac{\mu_k g}{R}$

若經過 t 秒達成純滾動，則此時移動速度與轉動角速度需滿足 $v = \omega R$

故 $v_0 - \mu_k gt = (\dfrac{\mu_k g}{R} \cdot t)R \qquad \Rightarrow t = \dfrac{v_0}{2\mu_k g}$

此時速度 $v = v_0 - \mu_k gt = \dfrac{v_0}{2}$，由等加速度公式 $v^2 = {v_0}^2 - 2ad$ 知，已經移動 $d = \dfrac{3v_0^2}{8\mu_k g}$

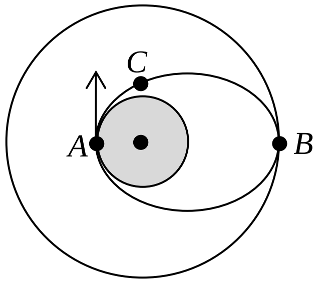
故剩下距離以等速度運動所需時間為 $t' = \dfrac{d}{v} = \dfrac{d - \dfrac{3v_0^2}{8\mu_k g}}{v_0/2}$

總共花費時間 $t + t' = \dfrac{v_0}{2\mu_k g} + \dfrac{d - \dfrac{3v_0^2}{8\mu_k g}}{v_0/2}$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

【試題二】

如圖，圖中灰色圓形為地球，質量為 M ，半徑為 R 。一飛船 m 自圖中地球 A 點以初速度 v 發射後，只受地球重力進入繞地球旋轉的橢圓軌道中。在 B 點再進行一次引擎噴射後，進到軌道半徑為 $3R$ 的圓周運動軌道中，則



(1) 飛船自 A 點到達 B 點後進入大圓軌道並繞行一周，一共需要歷時多久？(提示：橢圓面積為 $A = \pi ab$ ，其中 a 為半長軸，b 為半短軸)

(2) 若在 B 點時向後噴發其原始質量 1/10 的燃料以進入大圓軌道，試計算噴發的燃料要以相對於飛船多大速度發射 (以 v 表示)

(3) 承(2)，圖中 C 點位於橢圓軌道上，並與地球球心擁有相同的 x 座標，試計算此點的法線加速度目前是多大？

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

試題二參考解

(1) 所求時間即為繞行橢圓一半時間加上繞行大圓一圈時間。

首先計算橢圓週期：利用面積速率公式：$v_A = \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{1}{2} R v \sin\theta$

$v_A = \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{\pi \cdot 2R \cdot \sqrt{3}R}{T} = \dfrac{1}{2} R v$　　　$T_{橢圓} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi R}{v}$

利用克卜勒第三定律計算大圓週期：$(\dfrac{T_{大圓}}{T_{橢}})^2 = (\dfrac{R_{大圓}}{R_{橢}})^3$　　　$(\dfrac{T_{大圓}}{T_{橢}})^2 = (\dfrac{3R}{2R})^3$

$T_{大圓} = T_{橢} \cdot (\dfrac{3}{2})^{\frac{3}{2}}$

故所求歷時時間為 $\Delta t = \dfrac{1}{2} T_{橢} + T_{大圓} = \dfrac{1}{2} T_{橢} + T_{橢} \cdot (\dfrac{3}{2})^{\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{1}{2} + (\dfrac{3}{2})^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \dfrac{4\sqrt{3}\pi R}{v}$

(2) 利用克卜勒定律與力學能守恆求噴射前速度，利用大圓圓周運動向心力求噴射後速度，再利用動量守恆計算燃料速度。

依據克卜勒第二定律：$v_A = \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{1}{2} R v \sin\theta = C$　　$\Rightarrow v \propto \dfrac{1}{R\sin\theta}$　　$\Rightarrow v_B = 3v$

橢圓力學能守恆：$\dfrac{1}{2} m v^2 + (-\dfrac{GMm}{R}) = \dfrac{1}{2} m (\dfrac{v}{3})^2 + (-\dfrac{GMm}{(3R)})$

可得 $v = \sqrt{\dfrac{3GM}{2R}}$ ，故在 B 點噴射前速度為 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3GM}{2R}} = \sqrt{\dfrac{GM}{6R}}$

噴射後作圓周運動：$\dfrac{GMm}{(3R)^2} = m\dfrac{v^2}{(3R)}$ ，故在 B 點噴射後速度為 $\sqrt{\dfrac{GM}{3R}}$

噴射遵守動量守恆：$m \times \sqrt{\dfrac{GM}{6R}} = \dfrac{m}{10}(-v' + \sqrt{\dfrac{GM}{3R}}) + \dfrac{9m}{10}\sqrt{\dfrac{GM}{3R}}$

$v' = 10(\sqrt{\dfrac{GM}{3R}} - \sqrt{\dfrac{GM}{6R}}) = \dfrac{10\sqrt{2} - 10}{3} v$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

試題二參考解

(3) 利用橢圓軌跡方程式計算切線斜率後再分解出法線加速度

若以橢圓中心為原點，則此橢圓方程式為： $\dfrac{x^2}{(2R)^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}R)^2}=1$，並且地球球心座標為$(-R,0)$

計算隱微分一次，求出其切線方程式： $\dfrac{2x}{(2R)^2}+\dfrac{2y\cdot y'}{(\sqrt{3}R)^2}=0 \qquad \Rightarrow y'=-\dfrac{3x}{4y}$

對座標 $(-R,\dfrac{3R}{2})$ 而言，該點切線斜率為 $y'=\tan\theta=-\dfrac{3x}{4y}=-\dfrac{3\times(-R)}{4\times\dfrac{3}{2}R}=\dfrac{1}{2}$

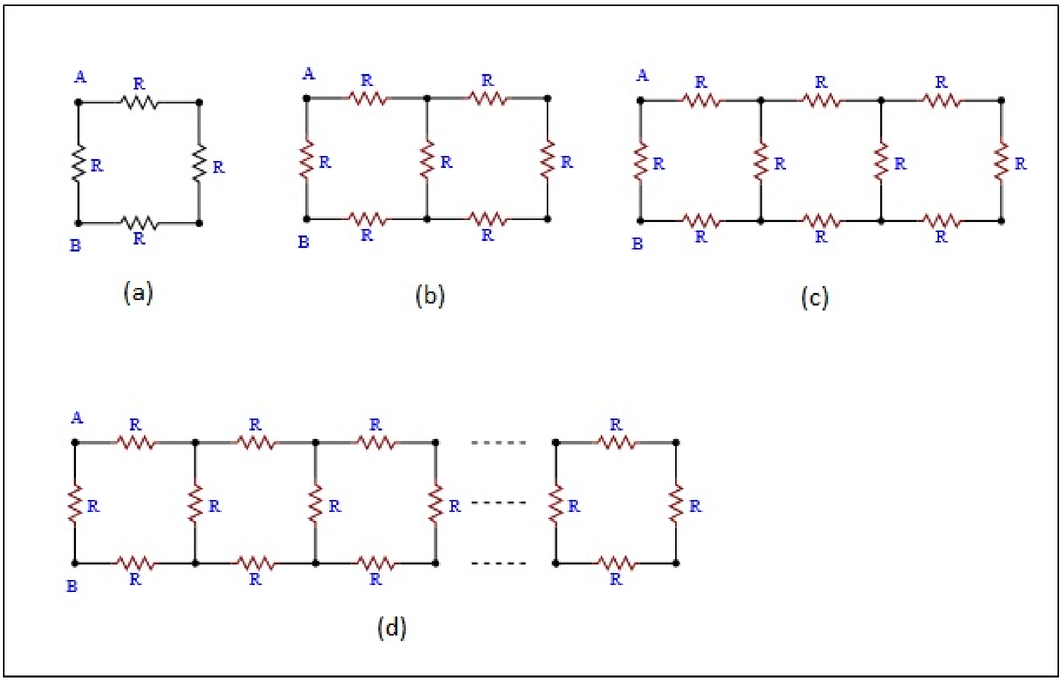
此點座標目前加速度大小為 $a=\dfrac{GM}{(\dfrac{3}{2}R)^2}=\dfrac{4GM}{9R^2}$

故此時法線加速度大小為 $a_N=a\cos\theta=\dfrac{4GM}{9R^2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{8GM}{9\sqrt{5}R^2}$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

【試題三】

請計算下列電路(a)~(d)中 A、B 兩點之間的等效電阻值。電路(a)為四個相同電阻 R 所組成之環狀電路，重複利用(a)電路中 AB 右側三電阻之ㄇ型電路 n 次可組合出其他電路。(a) n=1, (b) n=2, (c) n=3, (d) n=∞。



試題三參考解

(a) $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r+r+r} \Rightarrow R_1 = \frac{r \cdot 3r}{r+3r} = \frac{3}{4}r.$

(b) $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r+R_1+r} \Rightarrow R_2 = \frac{r \cdot (2r+R_1)}{r+(2r+R_1)} = \frac{11}{15}r.$

(c) $\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r+R_2+r} \Rightarrow R_3 = \frac{r \cdot (2r+R_2)}{r+(2r+R_2)} = \frac{41}{56}r.$

(d) $\frac{1}{R_n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r+R_{n-1}+r} \Rightarrow R_n = \frac{r \cdot (2r+R_{n-1})}{r+(2r+R_{n-1})}.$

If $n \to \infty$, then $R_n \to R_{n-1}$.

So we have $R_\infty = \frac{r \cdot (2r+R_\infty)}{r+(2r+R_\infty)} \Rightarrow {R_\infty}^2 + 2rR_\infty - 2r^2 = 0 \Rightarrow R_\infty = -r \pm \sqrt{3}r.$

$\because R_\infty > 0,\ \therefore\ R_\infty = (\sqrt{3} - 1)r.$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 5 區複賽物理科筆試參考解

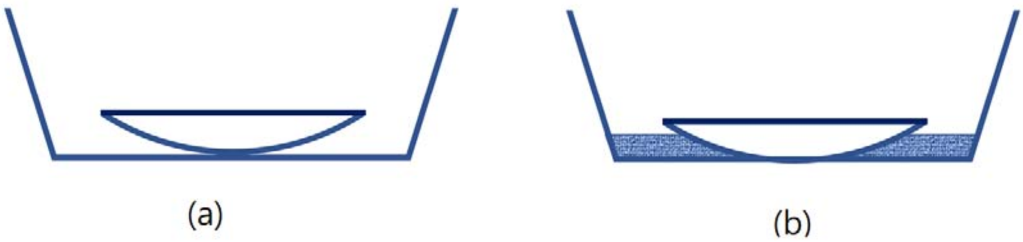
【試題四】

1.將一塊平凸透鏡凸面朝下放在一平底玻璃杯底面，如圖(a)所示。若將單色光由上向下垂直入射凸鏡的平面，請回答下列問題:

(1)若在此系統正上方向下觀察平凸透鏡之平面，可能會看到何種干涉圖形?

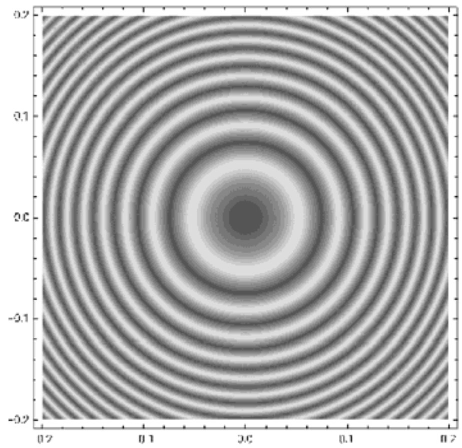
(2)若在此系統正下方向上觀察玻璃杯底部，可能會看到何種干涉圖形?

(3)若將純水倒入杯中，如圖(b)所示，請問干涉圖形會發生何種變化?

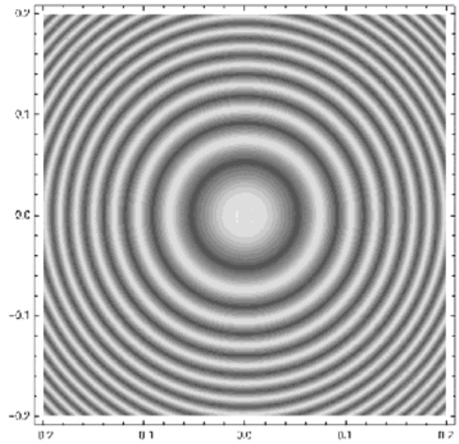


試題四參考解

(a)中心點為破壞性干涉之暗點, 第 m 級暗紋離中心點距離為$r_m = \sqrt{m\lambda R}$,
λ =入射光波長, R=透鏡曲率半徑



(b) 干涉圖形與(a)為互補，中心點為建設性干涉之亮點，如下圖右



(c) 水的折射率大於空氣折射率，因此在水中的光程差變大，導致干涉圓環變密