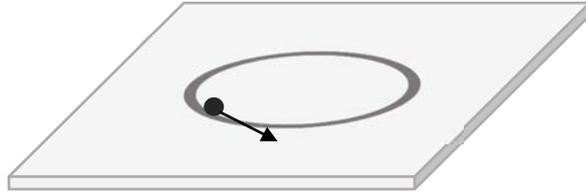


111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第一題】(15%)

在一光滑桌面上水平放置一個質量為 M 、半徑為 R 的圓形環，並在環的內緣放置一個質量為 m 的小球(如下圖)，且 $M > m$ 。一開始圓形環靜置於桌上，而小球以初速 \vec{v} 沿環的內緣運動。在整個系統均不考慮摩擦力的情況下，



- 請詳細說明小球相對於此系統之質量中心的運動速率及運動方式。(8%)
- 小球相對於桌面的最小動能是多少?(7%)

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第一題】參考解

因為一開始小球有速度 v 而圓形環靜止，所以相對於桌面總動量是 mv ，加上整個系統均不考慮摩擦力，因此依據動量守恆，質心(質量為 $m + M$)相對於桌面的動量也是 mv ，所以質心相對於桌面的速度將一直是 $m\vec{v}/(m + M)$ 。

- a. 從上面知小球一開始相對於質心的速度是

$$\vec{v} - m\vec{v}/(m + M) = M\vec{v}/(m + M),$$

而小球與質心的距離 l 是

$$m \times l = M \times (R - l) \Rightarrow l = R/(m + M)。$$

因為無外力矩，所以依據角動量守恆，小球相對於質心的角動量將一直保持不變，其值為：

$$L = m \times Mv/(m + M) \times R/(m + M) = mMRv/(m + M)^2$$

因此 小球將以 $Mv/(m + M)$ 的速率，在以質心為圓心， $R/(m + M)$ 為半徑的圓上做等速率圓周運動。

- b. 從前面知質心相對於桌面的速率將一直是 $mv/(m + M)$ ，而從 a 小題知小球相對於質心的速率將一直是 $Mv/(m + M)$ ，所以小球相對於桌面的最小速率將發生在前述這兩個相對運動的方向相反時，即

$$v_{\min} = Mv/(m + M) - mv/(m + M) = (M - m)v/(M + m)$$

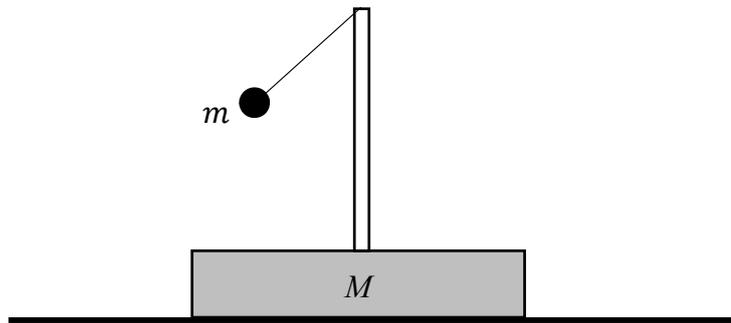
因此小球相對於桌面的最小動能為

$$\boxed{mv^2(M - m)^2/2(M + m)^2}$$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解

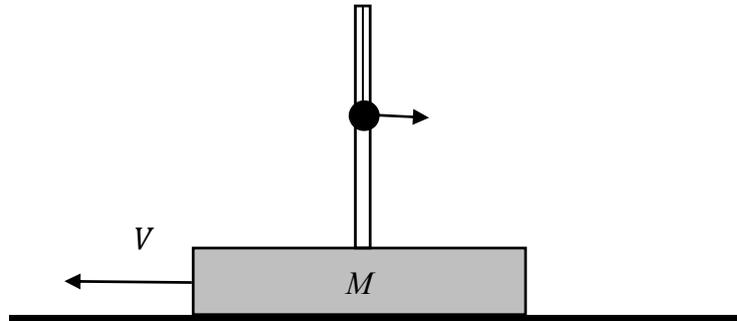
【第二題】(15%)

在一光滑桌面上水平放置一木板，木板上豎立一個裝置可以懸掛一個自由擺動的單擺，單擺是以長度為 l 的細繩綁住一小球所組成(如下圖)。假設小球與木板的質量分別為 m 與 M ，裝置與細繩的質量、桌面與木板的摩擦力均忽略不計。如果小球在細繩與鉛直線成 45° 度夾角時被釋放，在接下來的運動中，當小球到達最低點時，細繩的張力為 mg 的多少倍？(g 為重力加速度)



111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解

【第二題】參考解



小球擺盪的過程中，始終受到細繩施力 T 與重力 mg 。假設小球盪到最低點時相對於木板的速度為 v ，並假設木板此時向左速度為 V ，則小球所受合力等於其質量乘上加速度，在徑向方面：

$$T - mg = mv^2/l \quad (1)$$

所以

$$T = m(g + v^2/l). \quad (2)$$

另一方面假設小球在釋放的位置是零位面，則往後所有時刻系統的總能量均為零，因此在最低點時

$$\frac{1}{2}MV^2 - mgl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}m(v - V)^2 = 0 \quad (3)$$

而水平方向動量守恆導致

$$m(v - V) = MV \quad (4)$$

利用(4)式得到 V 並代入(3)式並化簡得

$$\frac{mM}{m+M}v^2 = 2mgl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (5)$$

所以

$$v^2/l = g(2 - \sqrt{2})/\left(\frac{M}{M+m}\right) \quad (6)$$

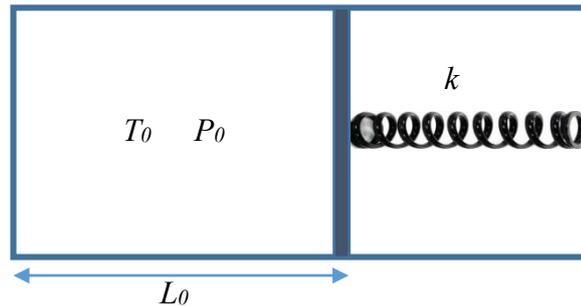
將(6)式代入(2)式得到

$$\boxed{\frac{T}{mg} = 3 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})\frac{m}{M} = 1 + (2 - \sqrt{2})\frac{M + m}{M}}$$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解

3.(10%)

有一密閉容器，內有一無摩擦可自由滑動的隔板區分左右且有效隔絕氣體。右邊是真空且在隔板與右側壁間裝有與其垂直且彈力常數為 k 之彈簧，左邊裝有氣體且滿足理想氣體方程式 $PV=nRT$ 。初始狀態時，溫度為 T_0 、壓力為 P_0 、氣體體積為 AL_0 ，其中 A 為隔板面積、 L_0 為氣室長度。當溫度增加 ΔT 時，氣體體積增加 $A\Delta x$ ，其中 Δx 為隔板向右的位移。假設容器及隔板的膨脹係數可忽略。試問，彈簧彈力常數為何？(請以題目中的已知物理量表示)



初始狀態時，溫度為 T_0 、壓力為 P_0 ，設此時彈簧壓縮量 x_0 ，則 $P_0A=kx_0$(1)

氣體體積為 AL_0 ，理想氣體方程式 $P_0AL_0=nRT_0$(2)

由上兩式，得 $kx_0L_0=nRT_0$(3)

當溫度為 $T_0+\Delta T$ 時， $k(x_0+\Delta x)(L_0+\Delta x)=nR(T_0+\Delta T)$

$$k\Delta x(L_0+\Delta x+x_0)=nR\Delta T$$
....(4)

由(4)/(3)得 $\Delta x(L_0+\Delta x+x_0)/x_0L_0=\Delta T/T_0$(5)

由(5)得

$$x_0 = \frac{(L_0 + \Delta x)T_0\Delta x}{L_0\Delta T - T_0\Delta x}$$
....(6)

由(6)得彈力常數

$$k = \frac{P_0A}{x_0} = \frac{P_0A}{\frac{(L_0 + \Delta x)T_0\Delta x}{L_0\Delta T - T_0\Delta x}} = \frac{P_0A(L_0\Delta T - T_0\Delta x)}{(L_0 + \Delta x)T_0\Delta x}$$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解

4.(20%)

- (a) 已知肥皂溶液的表面張力為 $\gamma = 5 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ ，假設緩緩吹肥皂泡時，皂液的表面張力性質不變，當肥皂泡的半徑為 4 cm 時，肥皂泡內外所承受的壓力差為何？
- (b) 有一物體和水裝在同一容器中，當溫度在 $30 \text{ }^\circ\text{C}$ 時，物體和水的體積比值為 $1:15$ ，此時物體的平均密度與水相同，物體完全沒入水中。當物體和水的溫度同時升至 $80 \text{ }^\circ\text{C}$ 時，水面的高度沒有改變，但物體有十分之二的體積浮出水面。已知水的體膨脹係數為 $2.4 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ，試問該物體的平均體膨脹係數為何？

(a)

設皂泡內的氣壓為 P' ，皂泡外的氣壓為 P ，皂泡半徑為 R ，由皂泡半球的靜力平衡可得

$$P' \times \pi R^2 = P \times \pi R^2 + 2 \times 2\pi R \times \gamma$$

$$P' - P = \frac{4\gamma}{R} = \frac{4 \times 5 \times 10^{-2} \text{ N/m}}{0.04 \text{ m}} = 5 \text{ N/m}^2$$

(b)

設在 $30 \text{ }^\circ\text{C}$ 時，物體和水的體積分別為 V_1 和 V_2 ，當物體和水的溫度同時升至 $80 \text{ }^\circ\text{C}$ 時，兩者體積各為 $V_1 + \Delta V_1$ 和 $V_2 + \Delta V_2$ ，水面的高度沒有改變，但物體有十分之二的體積浮出水面，設 f 為物體在水面下與水面上的體積比值，則

$$V_1 + V_2 = f \times (V_1 + \Delta V_1) + (V_2 + \Delta V_2)$$

$$\begin{aligned} f \frac{\Delta V_1}{V_1} &= (1-f) - \frac{\Delta V_2}{V_1} = (1-f) - \frac{V_2}{V_1} \frac{\Delta V_2}{V_2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\Delta T} \frac{\Delta V_1}{V_1} &= \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{1-f}{f} \right) - \frac{1}{f} \frac{V_2}{V_1} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{\Delta V_2}{V_2} \right) \\ \Rightarrow \beta_1 &= \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{1-f}{f} \right) - \frac{1}{f} \frac{V_2}{V_1} \beta_2 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{80-30} \times \left(\frac{1-0.8}{0.8} \right) - \frac{1}{0.8} \frac{15}{1} (2.4 \times 10^{-4}) = 5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

111 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試參考解