

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

高雄區複賽物理科實驗試題參考解

一. 實驗設計:

- (一) 請利用下列器材與題目說明設計實驗，量測待測彈簧的單圈與整條彈簧的彈性常數：
根據題目之提示，彈簧伸長量 S_n 與彈簧圈數 n 有以下之關係：

$$S_n = L_M = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} n^2 mg + n \left(\frac{1}{2} mg + Mg \right) \right]$$

將下方懸掛質量 $M = (N_0 - n) m$ 代入上式：

$$\begin{aligned} S_n = L_M &= \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} n^2 mg + n \left(\frac{1}{2} mg + (N_0 - n) mg \right) \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{2} mgn^2 + \left(N_0 + \frac{1}{2} \right) mgn \right] \end{aligned}$$

為了方便量測決定以每五圈記錄一次彈簧總長度，另外為了能夠更準確得出單圈彈簧的彈性係數 k 之近似解，故採取有限差分法方式(微分的概念)進行分析。

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_{n+5} - S_n \\ &= \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{2} mg(n+5)^2 + \left(N_0 + \frac{1}{2} \right) mg(n+5) \right] - \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{2} mgn^2 + \left(N_0 + \frac{1}{2} \right) mgn \right] \\ &= \left(\frac{-5mg}{k} \right) n + \frac{(5N_0 - 10)mg}{k} \end{aligned}$$

因此只要量測每五圈彈簧之距離差與彈簧圈數之關係，利用其斜率關係即可求得單圈彈簧係數 k ，再利用彈簧串聯之關係式便可求取整條彈簧之彈性係數 K 。

- (二) 利用(實驗一)之彈簧，測量待測物之重量：

根據虎克定律 $F=kX$ ，將彈簧掛上待測物量其伸長量，便可求得待測物之重量；但如果利用整條彈簧量測，掛上待測物後彈簧伸長量會使待測物接觸地面，此時會需要再考慮地板的支撐力，為了方便測量，故改變彈簧圈數進行量測。

- (三) 測量待測物之密度：

從題二中已經求出待測物之重量，所以只要將重量/重力加速度就可得待測物之質量，再利用游標尺量測待測物之邊長進一步求得體積，最終將質量(M)/體積(V)便可得到待測物之密度(ρ)。

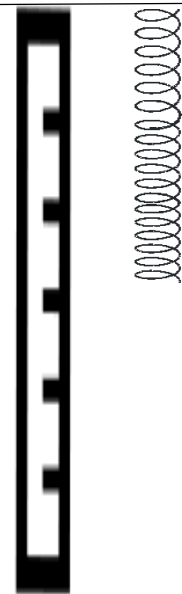
二. 實驗步驟:

(一) 請利用下列器材與題目說明設計實驗，量測待測彈簧的單圈與整條彈簧的彈性常數:

1. 架設支架並利用直角夾固定橫桿。
2. 用膠帶將皮尺一端黏在橫桿上，另一端黏在地面，並適當調整橫桿之高度。
3. 數彈簧總圈數。
4. 將彈簧夾在橫桿並利用膠帶固定。
5. 以第三圈為參考點並記錄其位置。
6. 往下每五圈紀錄彈簧的位置，記錄至第 75 圈。
7. 分析每五圈彈簧之距離差與彈簧圈數之關係，其斜率關係即可求得

單圈彈簧係數 k ，再利用彈簧串聯之關係式 $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$

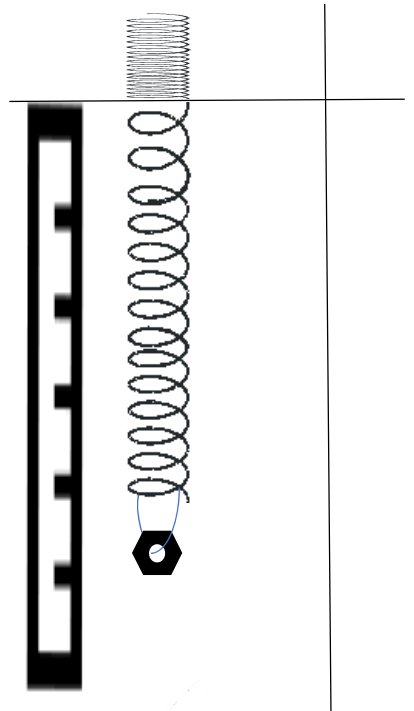
便可求取整條彈簧之彈性係數 K 。



(二) 利用(實驗一)之彈簧，測量待測物之重量:

1. 選擇減少彈簧圈數的彈簧掛在橫桿上並用膠帶固定。
2. 記錄彈簧無掛待測物時之最下方位置點。
3. 利用棉線將待測物綁在彈簧最下方。
4. 待彈簧穩定後記錄彈簧之最下方位置點。
5. 根據虎克定律 $F=kx$ ，計算彈簧之伸長量並代入公式便可得到待測物之重量。

(注意:這裡的 k 值為減少彈簧圈數後的 k 值)



(三) 測量待測物之密度:

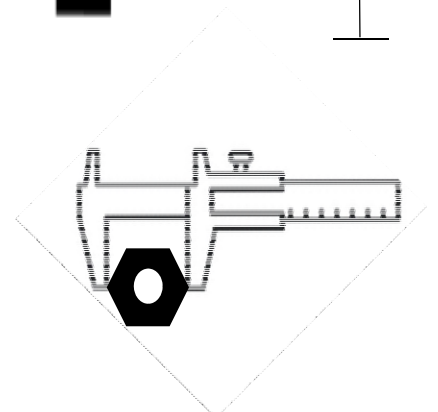
1. 利用游標尺測量待測物之邊長、內徑、厚度。

2. 將測量之待測物邊長 a 帶入正六邊形面積公式: $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$,

再扣除中心圓形面積，最後乘以厚度便可得到待測物之體積。

3. 將題二得到的重量除以重力加速度得到待測物之質量。

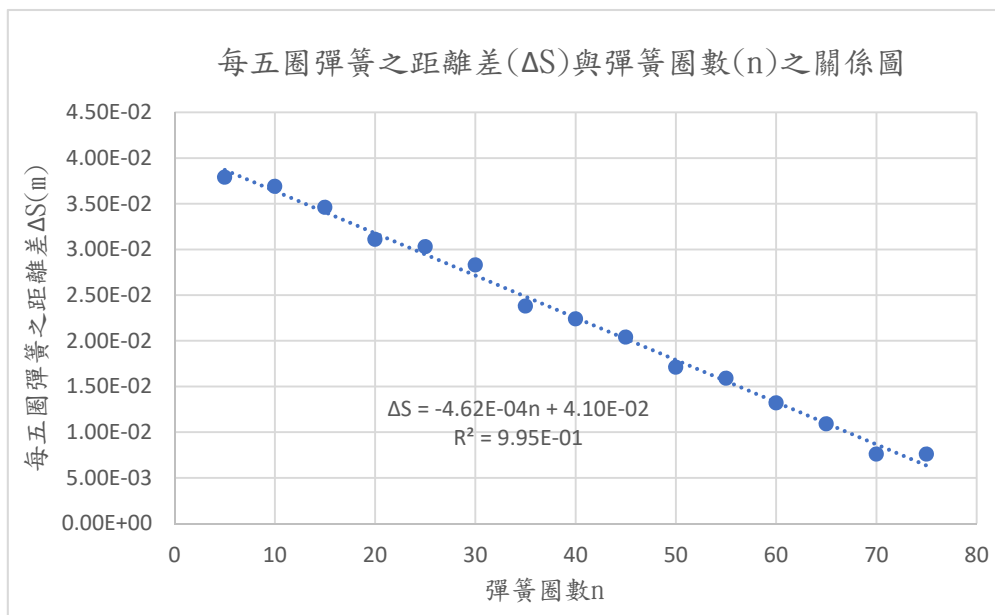
4. 將待測物質量除以待測物體積便可以得到待測物之密度。



三、數據分析：

(一) 請利用下列器材與題目說明設計實驗，量測待測彈簧的單圈與整條彈簧的彈性常數：

彈簧重量(kg)	0.03500			
彈簧圈數N	98			
參考點位置(cm)	0.24			
參考點以下彈簧圈數 N_0	95			
第N圈	位置(cm)	長度 S_n (cm)	長度 S_n (m)	ΔS (m)
5	4.03	3.79	0.0379	0.0379
10	7.72	7.48	0.0748	0.0369
15	11.18	10.94	0.1094	0.0346
20	14.29	14.05	0.1405	0.0311
25	17.32	17.08	0.1708	0.0303
30	20.15	19.91	0.1991	0.0283
35	22.53	22.29	0.2229	0.0238
40	24.77	24.53	0.2453	0.0224
45	26.81	26.57	0.2657	0.0204
50	28.52	28.28	0.2828	0.0171
55	30.11	29.87	0.2987	0.0159
60	31.43	31.19	0.3119	0.0132
65	32.52	32.28	0.3228	0.0109
70	33.28	33.04	0.3304	0.0076
75	34.04	33.80	0.3380	0.0076



單圈彈簧的彈性係數 k ：

每五圈彈簧之距離差(ΔS)與彈簧圈數(n)之關係式為 $\Delta S = -4.62 \times 10^{-4} n + 4.10 \times 10^{-2}$

對照每五圈彈簧之距離差(ΔS)與彈簧圈數(n)之理論公式 $\Delta s = \left(\frac{-5mg}{k}\right)n + \frac{(5N_0 - 10)mg}{k}$ ，

可得斜率 $a = \frac{-5mg}{k}$ ，則 $k = \frac{-5mg}{a} = \frac{-5 \times \left(\frac{0.03500}{98}\right) \times 10}{-4.62 \times 10^{-4}} = 38.64 \text{ (N/m)}$ 。

整條彈簧的彈性係數 K:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = \frac{1}{38.64} + \frac{1}{38.64} + \dots + \frac{1}{38.64} = \frac{98}{38.64}$$

則

$$K = \frac{38.64}{98} = 0.3942 \text{ (N/m)}。$$

(二) 利用(實驗一)之彈簧，測量待測物之重量:

68圈彈簧之原長(m)	0.1760
掛上待測物之彈簧總長度(m)	1.2820
伸長量(m)	1.1060

68 圈彈簧之彈性係數 k_{68} 為:

$$\frac{38.64}{68} = 0.5682 \text{ (N/m)}$$

則待測物之重量為:

$$k_{68} * \Delta x = 0.5682 * 1.1060 = 0.6284 \text{ (N)}。$$

(三) 測量待測物之密度:

圓形直徑(m)	0.01900	0.01900	0.01915	0.01915	0.0190
六邊形邊長(m)	0.01755	0.01753	0.01753	0.01753	0.01753
高度(m)	0.01700	0.01700	0.01700	0.01700	0.01700
體積V(m ³)	8.784E-06	8.745E-06	8.669E-06	8.669E-06	8.745E-06
密度(kg/m ³)	7.15E+03	7.19E+03	7.25E+03	7.25E+03	7.19E+03
密度平均((kg/m ³))	7.21E+03				
標準差	4.25E+01				
A類不確定度	1.90E+01				

待測物之密度為:

$$7.21 * 10^3 \pm 1.90 * 10^1 \text{ (kg/m}^3\text{)} = 7.21 \pm 0.02 \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

四、實驗討論:

1. 分析單圈彈簧係數 k 時，也可利用截距 $\frac{(5N_0-10)mg}{k}$ 來求得 k 值，但經過計算的 k 值約為 40.49 (N/m)，而整條彈簧之彈性係數 K 為 0.41(N/m)，與用斜率求得 k 值與 K 值並不一樣，原因可能是因為所用的關係式是忽略單圈的彈簧質量，再加上分析方法本身就是求得近似解，並非正確解，故會存在一點誤差。
2. 因為彈簧之彈性係數是用實驗求得的，加上皮尺也並非完全呈一直線，計算伸長量時亦會產生誤差，所以可能會使得測得之待測物重量誤差被放大。
3. 利用游標尺量測並計算待測物體積的過程中，是假設待測物是一個中心為中空圓形的正六邊形，已經忽略掉中空圓形內部的螺紋部分，所以所求得的體積可能為高估的數值，進而造成密度為低估的數值。