

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

【試題一】 20 分

一個球形肥皂泡內部的空氣密度為 ρ_i ，溫度為 T_i ，其半徑為 R_0 。周圍空氣的密度為 ρ_a ，溫度為 T_a ，大氣壓力為 P_a 。肥皂膜的密度為 ρ_s ，表面張力為 γ ，厚度為 t 。假設 $R_0 \gg t$ ，肥皂膜的質量與表面張力不隨溫度變化。試問：

編號	
得分	

(a) $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ 為何？（以 γ 、 P_a 、 R_0 表示）（10 分）

(b) 肥皂泡形成之初，內部空氣較溫暖，若欲使肥皂泡能浮在靜止的空氣中，則泡內空氣的最低溫度 T_i 需為何？（以 γ 、 P_a 、 R_0 、 ρ_a 、 T_a 、 ρ_s 、 t 表示）（10 分）

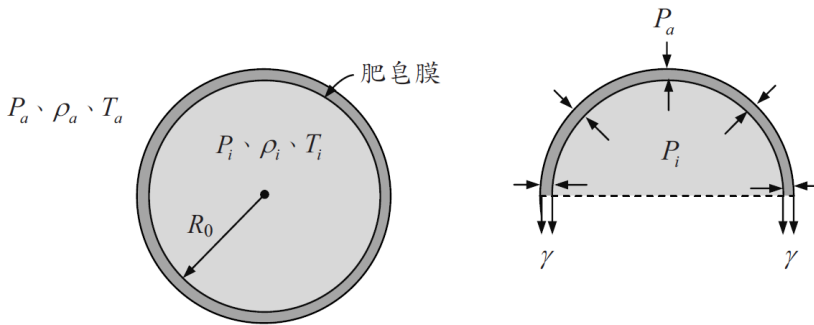
試題一作答區

參考解：

(a)

如下圖所示，

P_a 、 ρ_a 、 T_a 與 P_i 、 ρ_i 、 T_i 分別為肥皂泡外部與內部的空氣壓力、密度、溫度。



考慮上半部肥皂膜所受之各力達平衡且 $R_0 \gg t$ ，可得

$$P_i \pi R_0^2 = P_a \pi R_0^2 + 2(2\pi R_0 \gamma)$$

$$P_i = P_a + \frac{4\gamma}{R_0} \quad (1)$$

利用理想氣體方程式，可得氣體壓力和密度的關係式為
（設 m 為肥皂泡內的空氣質量， M 為空氣的莫耳分子量）

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow P = \frac{\rho RT}{M} \quad (2)$$

由(2)式可得

$$\rho T = P \frac{M}{R} \Rightarrow \frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} \quad (3)$$

由(1)和(3)式可得

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \quad (4)$$

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

(b)

設 W 為肥皂泡的總重量（肥皂膜重量+肥皂泡內部空氣重量），

$$W = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i g \quad (5)$$

利用(4)式，可得

$$W = 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right) g \quad (6)$$

設 B 為肥皂泡所受之空氣浮力，則

$$B = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g \quad (7)$$

若欲使肥皂泡能浮在靜止的空氣中，則其條件為 $B \geq W$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 t \rho_s g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right) g \quad (8)$$

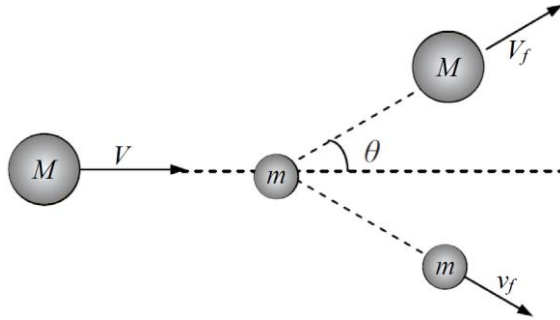
可得

$$T_i \geq \frac{R_0 \rho_a T_a}{R_0 \rho_a - 3t \rho_s} \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right) \quad (9)$$

【試題二】(10 分)

如圖所示，在光滑的水平桌面上，一質量為 M 的球體，以固定的速度 V ，彈性碰撞另一質量為 m 的靜止球體。若 $M > m$ ，入射球體在碰撞後，偏離原入射方向的角度為 θ 。試問，當發生最大偏離角度時，球體 M 的速度 V_f 為何？

(以 m 、 M 、 V 表示)



編號	《編號》
得分	

試題二作答區

參考解：

兩球體之間為彈性碰撞，因此兩球體系統的總動量和總動能皆守恆，得

$$M\vec{V} = M\vec{V}_f + m\vec{v}_f \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 \quad (2)$$

由(1)式的向量關係圖可得

$$\begin{aligned} (mv_f)^2 &= (MV)^2 + (MV_f)^2 - 2(MV)(MV_f)\cos\theta \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{(MV)^2 + (MV_f)^2 - (mv_f)^2}{2(MV)(MV_f)} \end{aligned} \quad (3)$$

由(2)、(3)式可得

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(MV)^2 + (MV_f)^2 - m(MV^2 - MV_f^2)}{2(MV)(MV_f)} \\ &= \frac{(M-m)MV^2 + (M+m)MV_f^2}{2(MV)(MV_f)} \\ &= \frac{(M-m)V}{2MV_f} + \frac{(M+m)V_f}{2MV} \end{aligned} \quad (4)$$

題設 $M > m$ ，(4)式等號右邊兩項皆為正值，利用配平方法可得

$$\cos\theta = \left[\sqrt{\frac{(M-m)V}{2MV_f}} - \sqrt{\frac{(M+m)V_f}{2MV}} \right]^2 + \frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{M} \quad (5)$$

由(5)式可看出，當平方項為 0 時， $\cos\theta$ 為最小值。

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

意即，當發生最大偏離角度時

$$\sqrt{\frac{(M-m)V}{2MV_f}} = \sqrt{\frac{(M+m)V_f}{2MV}} \Rightarrow V_f = V \sqrt{\frac{(M-m)}{(M+m)}}$$

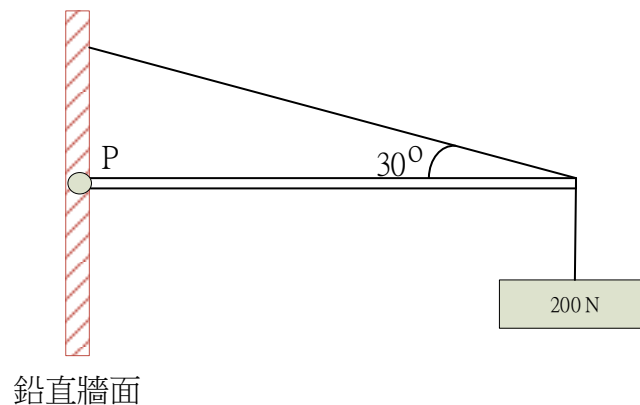
112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

【試題三】(8 分)

如下圖，有一根重量為 50 牛頓的均勻堅硬鐵桿，其一端於 P 點撐在一鉛直牆面上，另一端掛著一條繫著 200 牛頓重物體的繩子。若此鐵桿靜止呈水平狀態，且鐵桿上方的繩子與鐵桿夾 30° 角，則

- (a) 鐵桿於 P 點所受的水平方向分力大小為多少牛頓？ (4 分)
(b) 鐵桿於 P 點所受的鉛直方向分力大小為多少牛頓？ (4 分)

編號	
得分	



試題三作答區

參考解：

假設鐵桿在 P 點所受 x 方向分力為 F_x ，所受 y 方向分力為 F_y ，且繩子張力為 T 。
利用 x 方向淨力為 0 與 y 方向淨力為 0，可列出以下方程式：

$$F_x = T \cdot \cos(30^\circ),$$

$$F_y + T \cdot \sin(30^\circ) = 50 + 200。$$

再利用以 P 點為支點的淨力矩為 0，可列出以下方程式：

$$T \cdot \sin(30^\circ) \cdot L = 50 \cdot \frac{L}{2} + 200 \cdot L；其中 L 為鐵桿長度。$$

由上式可求出

$$T = 450 (N)。$$

進而可求出

$$F_x = T \cdot \cos(30^\circ) = 450 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3} \approx 390 (N)；$$

$$F_y = 50 + 200 - T \cdot \sin(30^\circ) = 25 (N)。$$

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

Ans: (a) $F_x = 225\sqrt{3} \approx 390$ (N) (4 分)
(b) $F_y = 25$ (N) (4 分)

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

【試題四】(8 分)

有 A 與 B 兩個帶電金屬球彼此分隔遙遠，此二金屬球的電位分別為 V_A 與 V_B 伏特，其半徑分別為 R_A 與 R_B 公尺。今用一條細長導線，使其兩端分別接觸此二金屬球，並讓兩球的電位相等後再移除此導線，則此時（假設無窮遠處的電位為 0）

(a) A 球上的電位大小為多少？（4 分）

(b) A 球表面的電場大小為多少？（4 分）

試題四作答區

參考解：

由題意可知，在金屬導線接觸兩球之前，

$$V_A = \frac{k \cdot Q_A}{R_A} \text{ (V)}, V_B = \frac{k \cdot Q_B}{R_B} \text{ (V)};$$

其中 k 為庫侖常數， Q_A 與 Q_B 分別為球 A 與球 B 上的電荷量。

當兩球透過導線使得電位相等之後，假設球 A 與球 B 上的電荷量分別為 Q'_A 與 Q'_B ，則

$$V'_A = \frac{k \cdot Q'_A}{R_A} = \frac{k \cdot Q'_B}{R_B} = V'_B;$$

其中 $V'_A = V'_B$ 為導線接觸兩球後，兩球上的電位。由此可得：

$$\frac{Q'_A}{Q'_B} = \frac{R_A}{R_B}。$$

又總電荷維持不變，大小為 $Q_A + Q_B$ ，則 $Q'_A = \frac{R_A}{R_A + R_B} \cdot (Q_A + Q_B)$ (C)。

所以 A 球上的電位為 $\frac{k \cdot Q'_A}{R_A} = \frac{k}{R_A + R_B} \cdot (Q_A + Q_B) = \frac{R_A \cdot V_A + R_B \cdot V_B}{R_A + R_B}$ (V)。

而 A 球上的電場為 $\frac{k \cdot Q'_A}{R_A^2} = \frac{k}{R_A \cdot (R_A + R_B)} \cdot (Q_A + Q_B) = \frac{R_A \cdot V_A + R_B \cdot V_B}{R_A \cdot (R_A + R_B)}$ (V/m)。

Ans: (a) $\frac{R_A \cdot V_A + R_B \cdot V_B}{R_A + R_B}$ (V) (4 分)

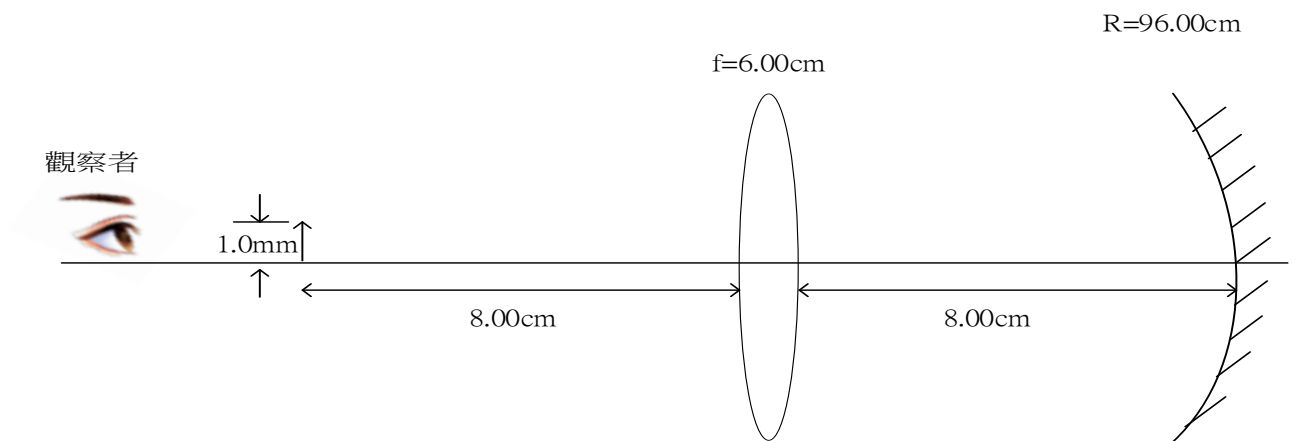
(b) $\frac{R_A \cdot V_A + R_B \cdot V_B}{R_A \cdot (R_A + R_B)}$ (V/m) (4 分)

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

【試題五】(14 分)

如下圖，一微小物體高 1.0 mm，位於一焦距 6.00 cm 的凸透鏡左方 8.00 cm 處，此凸透鏡的右方 8.00 cm 處另有一曲率半徑 96.00 cm 的凹球面反射鏡。對於圖中的觀察者，此微小物體發出的光線會經由這個鏡片系統成像，試求

- (a) 最後成像的位置在微小物體的左方或右方多少 cm 處？ (5 分)
 (b) 最後成像的高度為多少 mm？ (5 分)
 (c) 最後成像為正立或倒立？ (2 分)
 (d) 最後成像為實像或虛像？ (2 分)



試題五作答區

參考解：

$$\text{第一次成像：} \frac{1}{8} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{6}, s'_1 = 24, m_1 = -\frac{24}{8} = -3。$$

$$\text{第二次成像：} \frac{1}{8-24} + \frac{1}{s'_2} = -\frac{2}{-96}, s'_2 = 12, m_2 = -\frac{12}{-16} = +\frac{3}{4}。$$

$$\text{第三次成像：} \frac{1}{8-12} + \frac{1}{s'_3} = \frac{1}{6}, s'_3 = \frac{12}{5} = 2.4, m_3 = -\frac{12/5}{-4} = +\frac{3}{5}。$$

因為 $s'_3 = 2.4 > 0$ ，因此為實像，位置在透鏡左方 2.4 cm 處，也就是物體右方 5.6 cm 處。

$$\text{總放大率 } m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = -\frac{27}{20} = -1.35 < 0, \text{ 所以像為倒立，且像高 } 1.35 \text{ mm}。$$

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
高雄區複賽物理科筆試試題參考解

Ans: (a) 物體右方 5.6 cm 處 (5 分)

(b) 像高 1.35 mm (5 分)

(c) 倒立 (2 分)

(d) 實像 (2 分)