

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 5 區複賽物理科筆試試題參考解

**【試題一】**

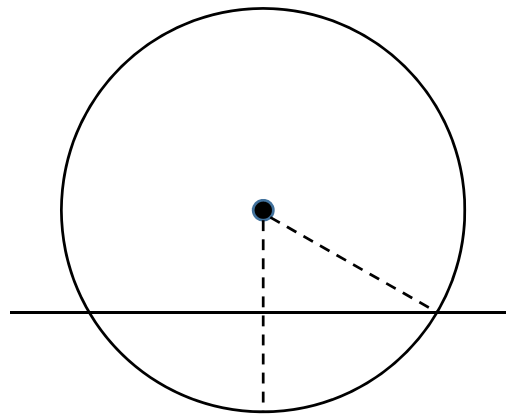
(1) 一物體質量  $m$ ，密度  $\rho$ ，自離水面高度  $h$  落下，假設水的密度為  $\rho_0$ ，且不考慮空氣阻力與水的阻力，僅考慮水的浮力對物體影響，試求此物體最深可沉至水下多深？

(2) 當我們在計算第(1)題時，事實上會簡化題目，也就是忽略此物體入水面過程，液面下體積不斷變化，導致浮力並非定值。今考慮一「球體」，密度  $\rho$ ，半徑  $R$ ，自下緣離水面高度  $h$  落下，假設水的密度為  $\rho_0$ ，且不考慮空氣阻力與水的阻力，僅考慮水的浮力對物體影響，試求此物體最深可沉至上緣離水面多深？

**試題一作答區**

(1)

$$\begin{aligned} \text{由 } \sum W &= W_{\text{浮力}} = \Delta E = \Delta K + \Delta U \\ &-(\rho_0 V g) \cdot h' = 0 + (-mg(h+h') - 0) \\ \rho_0 V g h' &= \rho V g (h+h') \\ h' &= \frac{\rho}{\rho_0 - \rho} h \end{aligned}$$



(2)

計算球體水下體積對深度的關係式：

設球體下緣與水面距離為  $x$ ，則下降  $dx$  的體積增加為

$$dV = (\pi(\sqrt{R^2 - (R-x)^2})^2) \cdot dx = \pi(2Rx - x^2)dx$$

$$\text{故水下體積 } V = \int dV = \int_0^x \pi(2Rx - x^2)dx = \pi R x^2 - \frac{1}{3} \pi x^3$$

$$\text{故浮力 } B = \rho_0 V_{\text{下}} g = \rho_0 g (\pi R x^2 - \frac{1}{3} \pi x^3)$$

球體自下緣接觸水面 ( $x=0$ ) 一直到上緣完全沒入水面 ( $x=R$ ) 的浮力過程做功為

$$\begin{aligned} W &= F \cdot d = -\int B \cdot dx = -\rho_0 (\frac{2}{3} \pi R^3) g \cdot R - 2 \int_0^R \rho_0 g (\pi R x^2 - \frac{1}{3} \pi x^3) \cdot dx \\ &= -\rho_0 (\frac{2}{3} \pi R^3) g \cdot R - 2 \rho_0 g (\frac{1}{3} \pi R x^3 - \frac{1}{12} \pi x^4) \Big|_0^R = -\frac{7}{6} \rho_0 g \pi R^4 \end{aligned}$$

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 5 區複賽物理科筆試試題參考解

$$\sum W = W_{\text{浮力}} = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

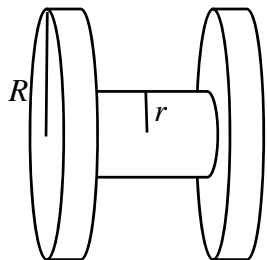
$$-\frac{7}{6}\rho_0 g \pi R^4 - \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g \cdot (h') = 0 - \rho \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g(2R + h + h')$$

$$h' = \frac{(8\rho - \frac{7}{2}\rho_0)R + 4\rho h}{4\rho_0 - 4\rho}$$

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 5 區複賽物理科筆試試題參考解

【試題二】

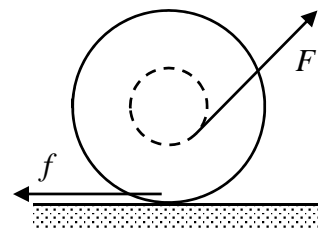
一啞鈴狀物體，其質量為  $m$ ，轉動慣量為  $I$ ，較細的內軸半徑為  $r$ ，較粗的外軸半徑為  $R$ ，如圖所示。



- (1) 假設分別持續施與相同的定力  $F$  (已知) 於此物體的兩個位置，一次作用於外軸最高點，一次作用於整體質心，若可維持整體在地面純滾動，試計算兩次的加速度比，並且指出為什麼這兩次都受兩力(即施力  $F$  與摩擦力  $f$ )，但加速度卻不一樣？



- (2) 假設我們可以任意選擇內軸與外軸的半徑比例，並且施力  $F$  (未知) 作用在內軸上的任意點，且施力的大小與方向可任選，若已知地面的靜摩擦係數為  $\mu$ ，試計算可使此啞鈴狀物體不滾動且恰可滑動時施力的最小值時，其對應的內外軸半徑比  $r/R$  為何？(答案以  $\mu$  表示)



試題二作答區

(1)

左圖分析：

$$\begin{cases} \sum F = ma \\ \sum \tau = I\alpha \\ a = a_t = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - f = ma \\ FR + fR = I\alpha \\ a = \alpha R \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2F}{m + \frac{I}{R^2}}$$

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 5 區複賽物理科筆試試題參考解

右圖分析：

$$\begin{cases} \sum F = ma \\ \sum \tau = I\alpha \\ a = a_T = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - f = ma \\ fR = I\alpha \\ a = \alpha R \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F}{m + \frac{I}{R^2}}$$

故加速度比為 2:1

兩次加速度不同是因為地面靜摩擦力在兩次條件不同下，產生不同數據，在計算  $\sum F = ma$  後產生的加速度也不同。

(2)

恰滑動時表示  $\sum F = 0$

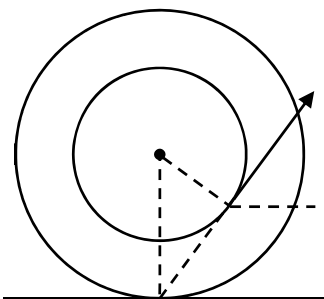
$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \cos \theta = f_{s \max} = \mu_s N \\ F \sin \theta + N = mg \end{cases} \Rightarrow F = \frac{\mu_s mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

其施力最小值在分母最大時，亦即  $\tan \theta = \mu_s$  時。

而恰不滑動表示施力延長必須通過啞鈴與地面接觸點(保證合力矩為零)，由圖可知

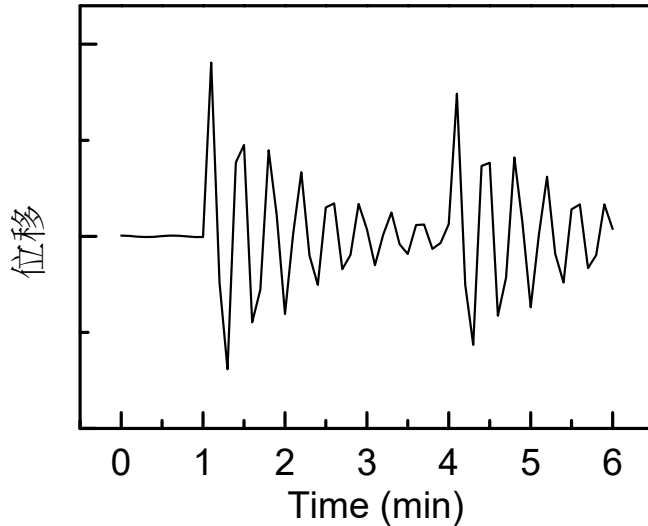
$$\cos \theta = \frac{r}{R}$$

配合  $\tan \theta = \mu_s$ ，可知內外軸半徑比  $r/R$  為  $\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_s^2}}$



112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 5 區複賽物理科筆試試題參考解

【試題三】



地震會在地球內部產生聲波，與在空氣傳播不同，地球會同時感受到橫波(S)與縱波(P)的聲波。通常 P 波的波速約為每秒鐘 8.0 公里；而 S 波的波速約為每秒鐘 4.5 公里。假設有一地震記錄儀上紀錄了一個地震的震度，如上圖。假設震波傳播方向為一直線，請問：

- (1) 在圖中約 1 與 4 分鐘產生的震波各屬於 P 波或 S 波？
- (2) 請求出 P 波與 S 波的振動頻率。
- (3) 地震發生源離此地震記錄儀的距離為何？

試題三作答區

- (1) 地震發生點與觀察者地震儀的距離未知，P 波速度快於 S 波。故先到達地震儀位置的應為 P 波。圖中第 1 分鐘應為 P 波，第 4 分鐘應為 S 波。
- (2) P 波與 S 波的振動頻率可由周期獲得，P 波 8 個完整波需 3 分鐘，S 波 5.5 個波需 2 分鐘。

$$f_P = \frac{1}{T_P} = \frac{8}{60 * 3} = 0.044 \text{ (Hz)}$$

$$f_S = \frac{1}{T_S} = \frac{5.5}{60 * 2} = 0.046 \text{ (Hz)}$$

- (3) 發生點與地震儀距離  $\Delta S$  可由兩波的時間差求得：

$$\Delta S = v_P t_P = v_S (t_P + 3 * 60)$$

$$\Rightarrow t_P = 231.4 \text{ (s)}$$

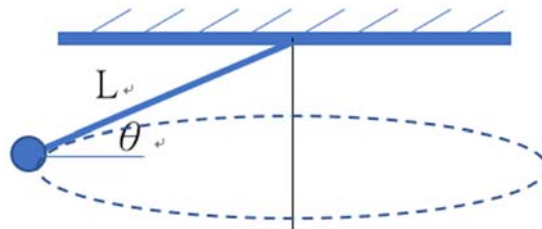
$$\Delta S = 1851 \text{ (km)}$$

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽  
第 5 區複賽物理科筆試試題參考解

【試題四】

一條長度為  $L$  之輕質繩子系著質量  $m$  的球做水平圓周運動，繩子與水平線的夾角為  $\theta$ 。假設重力場加速度為  $g$ 。如下圖所示，請問：

- (1) 求出繩子張力？
- (2) 水平圓周運動轉動週期為？
- (3) 水平圓周運動速度？
- (4) 若球上有一昆蟲，若由觀察者的坐標系看來，此昆蟲所受之力的方向與大小？但若已昆蟲的坐標系來看，請說明昆蟲所感受到的力方向與力的大小。



試題四作答區

(1) 張力  $T = \frac{mg}{\sin\theta}$

(2) 向心力  $= T\cos\theta = m \frac{4\pi R^2}{T_{period}^2}$

$$\Rightarrow T_{period} = 2\pi \sqrt{\frac{L\sin\theta}{g}}$$

(3)  $v = \frac{2\pi R}{T_{period}} = \cos\theta \sqrt{\frac{gL}{\sin\theta}}$

(4) 觀察者坐標系：昆蟲做水平圓周運動。所受之力為向心力  $T\cos\theta = \frac{mg\cos\theta}{\sin\theta}$

昆蟲坐標系：昆蟲與球無相對運動，所以不覺得自己在做運動，相對靜止。以球的坐標系而言，昆蟲所受之力應為向心力與離心力(假想力)之總和。若昆蟲脫離球的那一刻，對於球的坐標系而言，昆蟲受到只受到假想力(離心方向)作用，大小與向心力相等,方向相反。