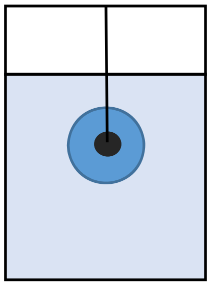
112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題參考解

【第一題】



在一盛著水(密度為ρ、比熱為s)的容器中，有一細線一端繫於容器上緣，另一端繫著一金屬球，金屬球被一層冰(密度為ρ'、熔化熱為h)所包覆(如右圖)，重力加速度為g。

a. (5%)一開始細線張力為F，冰的質量為m、溫度為0℃，經過一段時間後，因為部分冰溶化成水，細線張力變成$2F$，求此時剩餘冰的質量與m的比。

b. (5%)一開始水的質量為M、溫度為T_i℃，後來細線張力變成$2F$，求此時的水溫。(忽略達到熱平衡所需時間)

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題參考解

【第一題】參考解

a. 假設金屬球質量為m_b、密度為ρ_b，則依合力為零

$$m_b g + mg = F + \rho g\left(\frac{m_b}{\rho_b} + \frac{m}{\rho'}\right),$$

所以

$$F = m_b g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) - mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right),$$

當冰溶化成原來的r倍，細線張力變成$2F$

$$2F = m_b g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) - rmg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)。$$

兩式相減得:

$$F = (1-r)mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)$$

因此

$$\boxed{r = 1 - F/\left[mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)\right]}$$

b. 假設後來水溫為T_f℃，依據能量守恆

$$M(T_i - T_f)s = (1-r)mh + (1-r)ms(T_f - 0)$$

因此

$$(1-r) = Ms(T_i - T_f)/[m(h + sT_f)]$$

從 a. 知

$$(1-r) = F/\left[mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)\right]$$

所以

$$\frac{Ms(T_i - T_f)}{[m(h + sT_f)]} = \frac{F}{mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)}$$

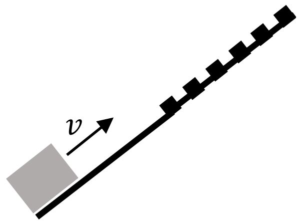
最後解得

$$\boxed{T_f = \frac{Mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)T_i - F\frac{h}{s}}{Mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right) + F} \text{ 或 } T_i - \frac{F\left(\frac{h}{s} + T_i\right)}{Mg\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right) + F}}$$

112學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第4區複賽物理科筆試試題參考解

【第二題】

在一斜面底部有一物體具有v的初速朝向斜面頂端運動(如右圖)。



a. (5%) 斜面下半部是長度L的光滑平面，上半部為粗糙平面，物體在光滑與粗糙平面的加速度分別為$-a(a > 0)$與$-na(n > 1)$。假設初速v足夠讓物體到達的最高點是在上半部的某個位置，求到達最高點所經歷的時間。

b. (5%) 斜面下半部改為長度L的粗糙平面，上半部改為光滑平面。不同平面對應的物體加速度如a.。同樣假設初速v足夠讓物體到達的最高點是在上半部的某個位置，求到達最高點所經歷的時間。

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題參考解

【第二題】參考解

a. 假設物體走完L時所花時間為T，則此時末速v'：

$$v' = v - aT > 0 \tag{1}$$

且

$$L = vT - \frac{1}{2}aT^2. \tag{2}$$

假設物體走到最高點所花時間為t_A，則

$$0 = v - aT - na(t_A - T) \tag{3}$$

所以

$$T = \frac{nat_A - v}{(n-1)a} \tag{4}$$

將(4)式代入(2)式並化簡得

$$n^2a^2t_A^2 - 2n^2at_A + (2n-1)v^2 + 2(n-1)^2aL = 0 \tag{5}$$

所以

$$t_A = \frac{nv \pm (n-1)\sqrt{v^2 - 2aL}}{na} \text{（正不合）} \tag{6}$$

因為如果沒有粗糙平面，達到最高點歷時v/a，有了粗糙平面，時間會縮短，因此

$$\boxed{t_A = \frac{nv - (n-1)\sqrt{v^2 - 2aL}}{na}}$$

b. 與 a. 小題的平面加速度做比較，本小題相當於將 a. 小題的$n \to \frac{1}{n}$，然後$a \to na$，因此t_A直接做這兩步驟即可獲得t_B

$$\frac{nv - (n-1)\sqrt{v^2 - 2aL}}{na} \to \frac{v/n - (1/n - 1)\sqrt{v^2 - 2aL}}{a/n}$$

$$\to \frac{v/n - (1/n - 1)\sqrt{v^2 - 2naL}}{a} = \boxed{\frac{v + (n-1)\sqrt{v^2 - 2naL}}{na} = t_B}$$

或者按照 a. 小題的作法也可以，但在解出t_B的兩個解時是負不合，因為如果沒有光滑平面，達到最高點歷時$v/(na)$，有了光滑平面，時間會增長。

112 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
第 4 區複賽物理科筆試試題參考解