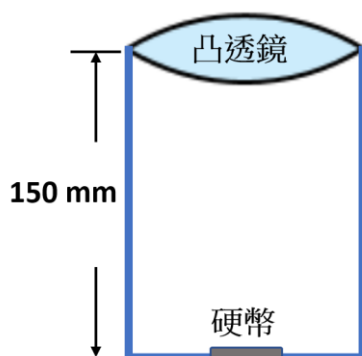


[試題一]

(a) (10 分) 有一個硬幣放置在燒杯底部中央，燒杯口上放置一個焦距為 **100 mm** 的凸透鏡，如圖所示。在此狀況下，硬幣成像的直徑為 **6mm**。試求此像的位置。

(b) (10 分) 承上題。將水注入燒杯，水面高度為  **$h$  mm**。求當  **$h$**  由 **0** 逐漸增大至接近 **150 mm** 時，硬幣成像的直徑大小隨  **$h$**  的函數關係。



[參考解] 題目新增: 水的折射率  $4/3$

(a)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$p = 150 \text{ mm}, f = 100 \text{ mm} \rightarrow q = 300 \text{ mm}$$

(b)

$$\text{apparent depth: } u = \frac{\text{real depth}}{n_{\text{water}}} = \frac{h}{4/3} = \frac{3h}{4}$$

$$\text{effective object distance: } p_{\text{eff}} = 150 - h + u = 150 - \frac{h}{4}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$p = p_{\text{eff}}, f = 100 \text{ mm} \rightarrow q = \frac{100(150 - h/4)}{50 - h/4}$$

$$\text{linear magnification: } M = \frac{q}{p} = \frac{100}{50 - h/4}$$

$$\text{Diameter: } D(h) = D_0 M = D_0 \frac{100}{50 - h/4}$$

$$\because D(0) = 6 \text{ mm}, \therefore D(h) = \frac{300}{50 - h/4}$$

[試題二]參考解

(1)

鐵鎚撞鐵釘遵守動量守恆： $\sum P = mv_0 = (m + M)v$

$$v = \frac{m}{M + m} v_0$$

$$\text{過程減少的動能 } \Delta K = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m}{m + M}v_0\right)^2$$

假設共需敲擊  $n$  次達到燃點，

$$\text{敲擊一次所需時間為 } \frac{1}{f_0}, \text{ } n \text{ 次歷時則為 } \frac{n}{f_0}$$

轉移給可燃物的能量一部份讓可燃物吸熱升溫，一部份逸散到外界：

$$\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m}{m + M}v_0\right)^2\right) \cdot n \cdot \eta_0 = Q_0 \cdot \frac{n}{f_0} + m_0 s \Delta T$$

$$n = \frac{m_0 s (T_1 - T_0)}{\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m}{m + M}v_0\right)^2\right) \cdot \eta_0 - \frac{Q_0}{f_0}}$$

(2)

由圖： $v = x + 1$

$$\text{計算過程每段時間：} dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{x + 1}$$

$$\Delta t = \int dt = \int_0^1 \frac{dx}{x + 1} = \ln 2$$

$$\text{逸散到外界的熱量 } \Delta Q = \int Q dt = \int_0^{\ln 2} Q_0 e^{\alpha t} dt = \frac{Q_0}{\alpha} \cdot (2^\alpha - 1)$$

動摩擦力作功形成的熱量一部份讓可燃物吸熱升溫，一部份逸散到外界：

$$(f_0 \cdot 1) \cdot \eta_0 = m_0 s \Delta T + \frac{Q_0}{\alpha} \cdot (2^\alpha - 1)$$

$$f_0 = \frac{m_0 s (T_1 - T_0) + \frac{Q_0}{\alpha} \cdot (2^\alpha - 1)}{\eta_0}$$

(3)

雙原子分子  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$ ，在絕熱條件下，氣體遵守： $PV^\gamma = C$ ，以及  $T \propto V^{1-\gamma}$

$$\text{故 } \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_0 + A \cdot x}\right)^{1-\frac{7}{5}}$$

$$x = \frac{V_0}{A} \cdot \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{V_0}{A}$$

【試題三】參考解

- (a) 假設丙重物質量為  $xm$ ，並以繫著甲重物的細線為水平線，則依水平合力為零：

$$mg = \frac{m}{2} g \cos \alpha + xmg \cos \beta,$$

所以兩邊消掉  $mg$  得

$$1 = \frac{1}{2} \cos \alpha + x \cos \beta,$$

利用和差化積公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$$

題目要求  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ，帶入上式後兩式比較得到

$$\sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{即 } \beta = 30^\circ, \text{ 則 } \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$$

所以丙重物質量為  $\sqrt{3}m/2$ 。

- (b) 假設丙重物質量為  $xm$ ，並以繫著甲重物的細線為水平線，則依水平合力為零：

$$mg = mg \cos \alpha + xmg \cos \beta,$$

$$\text{所以兩邊消掉 } 2mg \text{ (配合 } \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2})$$

得

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{x}{2} \cos \beta,$$

利用和差化積公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$$

題目要求  $\alpha + \beta = 150^\circ$ ，帶入上式後兩式比較得到

$$\sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{即 } \beta = 30^\circ, \text{ 則 } \sin \alpha = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2}$$

所以丙重物質量為  $\sqrt{3}m$ 。

