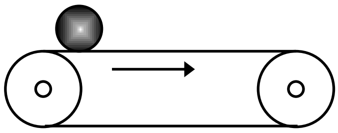
[試題一]

1. 如圖所示，一輸送帶恆以速率v_0向右捲動。在$t=0$的時候把一顆球輕輕放上輸送帶的位置，今已知球質量為M、半徑為R、轉動慣量為$\frac{2}{5}MR^2$，且球與輸送帶之間的靜摩擦係數為μ_s、動摩擦係數為μ_k。當球被輸送帶向右運送過程，在球轉變為純滾動的時候，也同時達到等速度運動狀態，試計算達成純滾動需要多少時間。



【參考解:】

球最初受到向右的動摩擦力作用，一邊向右加速，一邊逆時針滾動。

移動加速度$a=\frac{f_k}{M}=\mu_k g$，轉動加速度$\alpha=\frac{\tau_f}{I}=\frac{\mu_k Mg\cdot R}{\frac{2}{5}MR^2}=\frac{5\mu_k g}{2R}$

達到等速條件：球的下緣速度與輸送帶一樣快，均為v_0

達到純滾動條件：球的下緣與球心的相對速度及角速度遵守$v_{邊緣對中心}=\omega R$

假設經過t秒達到純滾動，

球心速度$v_{球心}=v_0+at=\mu_k g\cdot t$

球逆時針轉動角速度$\omega=\omega_0+\alpha t=\frac{5\mu_k g}{2R}\cdot t$

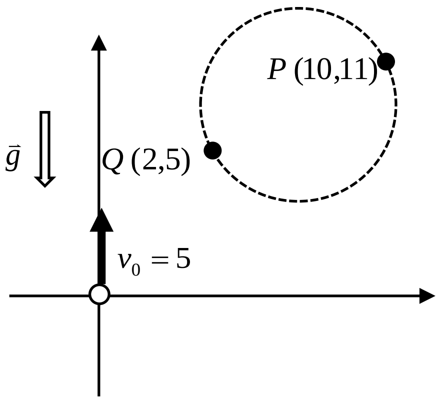
球的下緣速度 = 球心移動速度 + 邊緣相對於球心速度：

$$\mu_k g\cdot t+(\frac{5\mu_k g}{2R}\cdot t)\cdot R=v_0$$

$$t=\frac{v_0}{\mu_k g+\frac{5\mu_k g}{2}}=\frac{2v_0}{7\mu_k g}$$

[試題二]

2. 如圖，x 軸表示水平線，y 軸表示鉛直線，重力場強度為 $-10\,\vec{j}$ （$\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 分別為 x 方向與 y 方向的單位向量)。空間中分布有均勻電場。今已知對所有的點集合 (x,y) 滿足 $(x-6)^2+(y-8)^2=25$ 之中，$P\,(10\,,11)$ 與 $Q\,(2\,,5)$ 兩點分別擁有最高的電位及最低的電位，並且 PQ 的電位差為 25 伏特。今自座標原點沿 y 軸向上以初速度 $+5\,\vec{j}$ 射出一帶電小球，其質量為 2 公斤、電量為 $+4$ 庫侖。假設只考慮電力與重力作用，試求此小球運動軌跡過程曲率半徑的最小值。



【參考解:】

如圖，點集合 $(x-6)^2+(y-8)^2=25$ 為圓形，既然 P 、 Q 點有點集合中最高與最低的電位，表示等位線一定恰與兩點相切，並且電場方向必由 P 指向 Q ，其大小為 $E=\dfrac{\Delta V}{d}=\dfrac{25}{10}=2.5$ ，

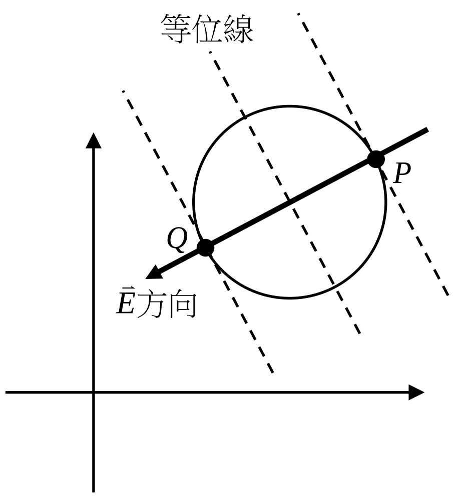
故 $\vec{E}=-2\vec{i}-1.5\vec{j}$

合併電力與重力成為等效重力場： $\vec{g}'=\dfrac{m\vec{g}+q\vec{E}}{m}=-10\vec{j}+\dfrac{4}{2}\times(-2\vec{i}-1.5\vec{j})=-4\vec{i}-13\vec{j}$

帶電小球運動可視為類似斜向拋射，其拋射初速與等效重力場夾角 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+13^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{185}}$

故曲率半徑最小值在等效斜向拋射最高點，利用法線加速度 $a_N=\dfrac{v^2}{R}$ 可求出

$$R=\frac{(v_0\cos\theta)^2}{a_N}=\frac{(5\cdot\frac{4}{\sqrt{185}})^2}{\sqrt{4^2+13^2}}=\frac{80}{37\sqrt{185}}$$

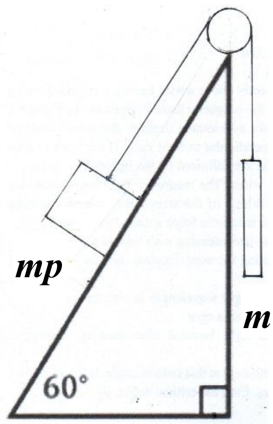


[試題三]

有一質量$m_p = 70$公斤的方塊被懸掛於一粗糙直角三角形斜面且仰角為 60°，繫繩平行斜面(忽略質量)，另一端經由理想定滑輪連接一質量體 m，如圖，斜面的動摩擦係數與靜摩擦係數分別是 0.550 與 0.850，試求：

(a) 為使斜面上的方塊m_p不發生向上滑動，請求出質量體 m 的最大質量(6 分)，同時繪製方塊m_p的受力分析圖(2 分)。

(b) 若繫繩突然斷裂，請求出此時方塊m_p的加速度。（5 分），並繪製受力分析圖(2 分)。



參考解；

(a) 方塊m_p不會從斜面向上滑動表示此時合力為零，且為最大靜摩擦力自由體圖如解圖 1。(畫出得 2 分) 由自由體圖可得力學方程式；

$\vec{j}$方向； $\vec{n} + m_p g\cos(60^o)(-\vec{j}) \rightarrow \vec{n} = 70 \cdot g \cdot \frac{1}{2} = 35 \cdot g(\vec{j})$

$\vec{\imath}$方向； $\vec{f_s} + \vec{T} + m_p g\sin(60^o)(-\vec{\imath}) = 0$

$\rightarrow \mu_s n(-\vec{\imath}) + m \cdot g(\vec{\imath}) + m_p g\, sin(60^o)(-\vec{\imath}) = 0$

$\rightarrow m = 0.850 \cdot 35.0 + 70.0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 90.4kg(\vec{\imath})$ (6 分)

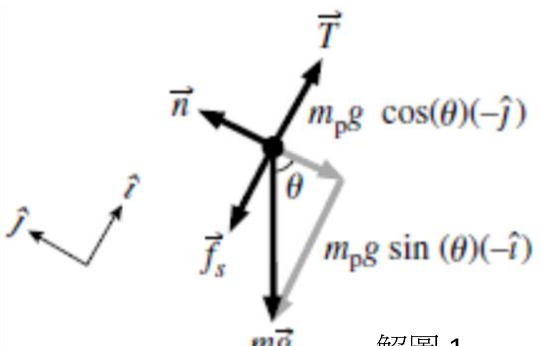
(b) 當繫繩斷掉 T=0，往下滑動摩擦力變為動摩擦力且向 i 方向，其自由體圖如解圖 2(畫出得 2 分) 由自由體圖可得力學方程式；

$\vec{\imath}$方向；$\vec{f_s} + m_p g\sin(60^o)(-\vec{\imath}) = m_p \cdot \vec{a}$

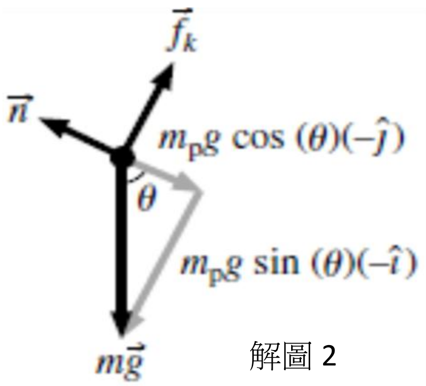
$$m_p\vec{a} = \mu_k n(\hat{i}) + m_p g\sin(\theta)(-\hat{i}) = \mu_k m_p g\cos(\theta)(\hat{i}) + m_p g\sin(\theta)(-\hat{i})$$

$$\vec{a} = \mu_k g\cos(\theta)(\hat{i}) + g\sin(\theta)(-\hat{i})$$

$$\vec{a} = 9.80 \cdot [0.550 \cdot \frac{1}{2}(\vec{\imath}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\vec{\imath}) = 5.79\ \frac{m}{s^2}(-\vec{\imath}) \quad (5\ 分)$$



解圖 1



解圖 2

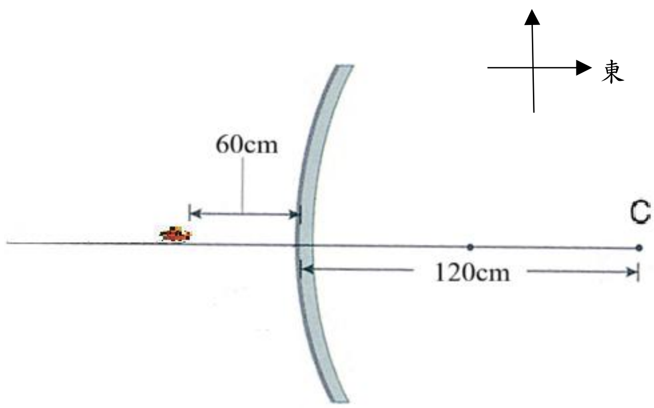
[試題四]

一隻小瓢蟲初始位於曲率半徑為 120 公分凸面鏡的光軸上，距離鏡頂 60 公分，如圖，瓢蟲沿光軸向西爬行 60 公分停止，試求:

(a) 求瓢蟲初始的成像位置。(4 分) 此球面鏡之焦距。(3 分)

(b) 成像中瓢蟲爬行多遠?(4 分) 方向為何?(2 分)

(c) 瓢蟲成像是實像還是虛像?請說明原因。(2 分)



參考解:由球面鏡方程式；$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}$ .....(1)

(a)初始瓢蟲像位於鏡頂前(即原點左)60 公分，所以 s=－60 公分,R=120 公分代入(1)式得；

$\frac{1}{-60}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{120}$ $\quad \frac{1}{s'}=\frac{1}{30}$ $\quad s'=30cm$ 像點位於鏡頂右 30 公分光軸上。(4 分)

當物點離面鏡無窮遠，此時成像位置為此面鏡之焦點，無窮遠$s=-\infty, s'=f$代入(1)式得；$\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{f}=\frac{2}{R}$ $\rightarrow f=\frac{R}{2}$ 即球面鏡的焦點為曲率半徑的一半，所以焦點位於鏡頂右 60 公分光軸上(3 分)

(b)瓢蟲向西爬行 60 公分此時位置為鏡頂前 120 公分即 s=120 公分，代入式(1)得；

$\frac{1}{-120}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{120}$ $\quad \frac{1}{s'}=\frac{3}{120}$ $\quad s'=40cm$ 可知像點此時位於鏡頂右 40 公分光軸上，40-30=10cm　所以瓢蟲鏡像爬行 10 公分。(4 分)

依笛卡爾符號規約知瓢蟲像爬行+10 公分，所以爬行方向為向東。(2 分)

(c)由前面計算得知瓢蟲成像位置位於鏡頂右側(即鏡後)光軸上，實際光線無法到達故為虛像。(2 分)