教育部99學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（一）參考解

【第一題參考解】

圓柱體的轉動慣量 I 為 $\sum\sum\sum(\Delta\rho\cdot\rho\Delta\theta\cdot\Delta z)\cdot\sigma_0\rho\cdot\rho^2$

$$\Rightarrow I=\sigma_0\sum_k\sum_j\sum_i\left(\frac{Ri}{n}\right)^4\cdot\frac{R}{n}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\left(\frac{L}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2\pi\sigma_0R^5L}{5}$$

圓柱體的質量 M 為 $\sum\sum\sum\Delta\rho\cdot\rho\Delta\theta\cdot\Delta z\cdot\sigma_0\rho$

$$\Rightarrow M=\sigma_0\sum_k\sum_j\sum_i\left(\frac{Ri}{n}\right)^2\cdot\frac{R}{n}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\left(\frac{L}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2\pi\sigma_0R^3L}{3}$$

$$\therefore I=\frac{3}{5}MR^2$$

當撞擊力之力臂為 H 時，圓柱體完全滾動而不滑動，則

$$F=Ma \qquad (1)$$

$$\tau=I\alpha\Rightarrow FH=\frac{3}{5}MR^2\alpha \qquad (2)$$

$$a=R\alpha \qquad (3)$$

式(2)除以式(1)後將式(3)代入，得

$$H=\frac{3}{5}R^2\cdot\frac{\alpha}{a}=\frac{3}{5}R$$

【第二題參考解】

假設容器內氣體為理想氣體，則 1.0 mol 氣體之體積為

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{nRT}{P} \\
&= \frac{(1.0mol)\times(8.31J/mol\cdot K)\times(300K)}{(1.0\times10^{-10}mmHg/760mmHg)\times(1.01\times10^{5}Pa/atm)} \\
&= 1.88\times10^{11}\ m^{3}
\end{aligned}
$$

每一氣體分子所佔體積

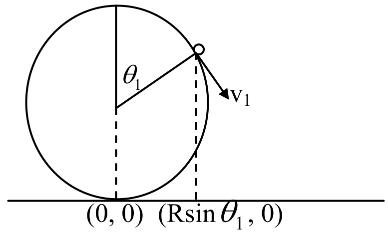
$$
\begin{aligned}
v &= \frac{V}{N} = \frac{V}{nN_A} \\
&= \frac{1.88\times10^{11}m^{3}}{(1.0mol)\times(6.02\times10^{23}molecules/mol)} \\
&= 3.12\times10^{-13}\ m^{3}
\end{aligned}
$$

因此，氣體分子之平均距離為

$$d = \sqrt[3]{v} = 6.78\times10^{-5}\,\mathrm{m}$$

【第三題參考解】

(1) 如圖所示



小球所受之向心力 $F_c = m_1 g\cos\theta - N = \dfrac{m_1 v^2}{R}$

設離開處之角度為 θ_1，離開時小球瞬間速率為 v_1

離開瞬間 $N = 0$，即 $F_c = m_1 g\cos\theta_1 = \dfrac{m_1 v_1^2}{R}$ (1)

從最高點至離開處，小球的位能轉成動能，

即 $m_1 gR(1-\cos\theta_1) = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2$ (2)

解(1)(2)，得 $m_1 gR(1-\cos\theta_1) = \dfrac{1}{2}m_1 gR\cos\theta_1$

即 $\cos\theta_1 = \dfrac{2}{3}$ ，代回(1)，得 $v_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR} = 6\sqrt{5}$ (m/s)

(2) v_1 之水平分量 $v_{1x} = v_1\cos\theta_1 = 4\sqrt{5}$ ，垂直分量 $v_{1y} = v_1\sin\theta_1 = 10$

離開處距地面高度為 $R(1+\cos\theta_1) = 45$

設小球到達地面前瞬間之速率垂直分量為 v_{1y}'

由 $v^2 = v_0^2 + 2as$ 即 $v_{1y}'^{\,2} = (v_1\sin\theta_1)^2 + 2gR(1+\cos\theta_1)$

得 $v_{1y}' = 10\sqrt{10}$ ，由地面反彈後離地瞬間之垂直速度大小亦為 $10\sqrt{10}$ [註]

設由離開處至落地經過之時間為 t_1 ，$10\sqrt{10} = 10 + 10t_1$ ，$t_1 = \sqrt{10} - 1$

設由地面反彈至最高點經過之時間為 t_2 ，$0 = 10\sqrt{10} - 10t_2$ ，$t_2 = \sqrt{10}$

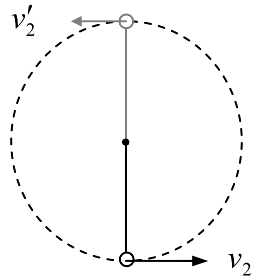
設最高點的高度為 h，由 $0^2 = (10\sqrt{10})^2 - 2gh$ ，得 $h = 50$

由離開處至最高點的水平距離為 $v_1\cos\theta(t_1+t_2) = 40\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

離開處之 x 座標為 $R\sin\theta_1 = 9\sqrt{5}$ ，所以最高點之 x 座標為 $40\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$

即小球反彈至最高點之座標為 $(40\sqrt{2} + 5\sqrt{5}, 50)$

(3) m_1 反彈至最高點時，垂直速度大小為 0，水平速度大小為 $4\sqrt{5}$



在此瞬間與靜止懸吊之 m_2 發生彈性碰撞

因 $m_1 = m_2$ ，所以 m_1 與靜止之 m_2 彈性碰撞後，

m_2 之速度大小 $v_2 = v_1\cos\theta_1 = 4\sqrt{5}$ [註]

設 m_2 繞行至圓周最高點時，其速度為 v_2'

繩長 L 之最大值發生在當 m_2 繞行至圓周最高點時，

僅由重力擔任向心力之情況，即此時 v_2' 為做圓周運動可允許之最小值

m_2 繞行至圓周最高點時，向心力 $F_c = m_2 g = \dfrac{m_2 v_2'}{L}$ (3)

考慮動位能之轉換，$\frac{1}{2}m_2v_2^2 - m_2g(2L) = \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$ (4)

解(3)(4)，得 L=1.6 (m)

(4) (a) 將 L=1.6 (m) 代回(3)，得 $v_2' = 4$ (m/s)

(b) 將 L=1.6 (m) 代回(4)，得 $v_2' = 4$ (m/s)

(c) 因 $m_1 = m_2$ ，所以 m_1 與靜止之 m_2 彈性碰撞後將動能完全轉移[註]，

所以整個過程(從圓環滑落…圓周運動)可視為同一小球所經歷。

小球在繞行至圓周運動最高點時，距離地面為 $50 + 1.6 \times 2 = 53.2$ (m)

小球最初在圓環最高點時距地為 $2R = 54$ (m)

考慮動位能之轉換，$mg(54 - 53.2) = \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$ ，可得 $v_2' = 4$ (m/s)

[註] 一維彈性碰撞，考慮動量與動能守恆，

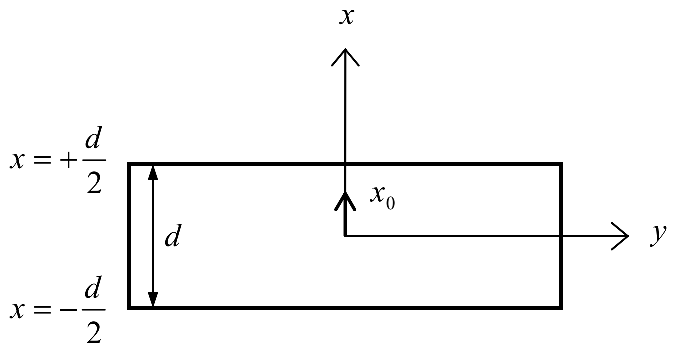
可得 $v_a' = (\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b})v_a + (\frac{2m_b}{m_a + m_b})v_b$ $v_b' = (\frac{2m_a}{m_a + m_b})v_a + (\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b})v_b$

當 m_b 碰撞前為靜止，即 $v_b = 0$ 時

若 $m_b >> m_a$ ，則 $v_a' = -v_a$ ，$v_b' = 0$

若 $m_b = m_a$ ，則 $v_a' = 0$ ，$v_b' = v_a$

【第四題參考解】



電量為$-e$的粒子於 x 軸方向上距原點 x 處（$0<x<x_0$），

根據高斯定律，通過面積 A 之電通量：$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\varepsilon}$ ，

令所包圍之高斯面為一個立方體，範圍在$-x \le x' \le x$ 、$-\frac{l_y}{2} \le y' \le \frac{l_y}{2}$ 與

$-\frac{l_z}{2} \le z' \le \frac{l_z}{2}$ ，則 $A = 2\,l_y l_z$ ， $Q = \rho V = 2\,\rho l_y l_z x$ ，

在 x 處之電場強度 $E = \frac{\rho x}{\varepsilon}$

電力為 $F = -eE = -\frac{e\rho x}{\varepsilon} = ma$

粒子的加速度 $a = -\frac{e\rho}{m\varepsilon}x$

由於粒子進行簡諧運動，則 $a = -\omega^2 x = -(2\pi\nu)x$

粒子的振盪頻率 $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e\rho}{m\varepsilon}}$ ，

粒子的振盪週期 $T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{m\varepsilon}{e\rho}}$

【第五題參考解】

小球第一次撞擊地面時速度為v_1，則

$$\frac{1}{2}mv_1^2=mgh$$

所以$v_1=\sqrt{2gh}\downarrow$。第一次撞擊後$v_1=\sqrt{2gh}\uparrow$，此時鋼板同時落下速度為$v_2=0$，則小球與鋼板撞擊時間t_1滿足

$$h=v_1t_1-\frac{1}{2}gt_1^2+v_2t_1+\frac{1}{2}gt_1^2$$
$$=v_1t_1$$

所以$t_1=\sqrt{\frac{h}{2g}}$，此時小球的速度為

$$v'_1=\sqrt{2gh}-gt_1=\sqrt{\frac{gh}{2}}\uparrow，$$

高度為

$$H=v_1t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{3}{4}h\ ；$$

同時鋼板的速度為

$$v'_2=gt_1=\sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow，$$

因此相對於鋼板而言，小球的速度是$\sqrt{2gh}\uparrow$。因為鋼板質量遠大於m，小球與鋼板的撞擊等同於與地面的撞擊，所以撞完後小球相對於鋼板的速度是$\sqrt{2gh}\downarrow$，然而鋼板本身的速度為$\sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow$，所以小球相對於地面的速度是

$$v''_1=\sqrt{2gh}\downarrow+\sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow=3\sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow。$$

因此小球第二次撞擊地面時間為t_2滿足

$$\frac{3}{4}h=v''_1t_2+\frac{1}{2}gt_2^2\ ，$$

所以$t_2=\left(\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{h}{g}}$，小球第二次撞擊地面時速率是

$$v''_1+gt_2=\sqrt{6gh}\ 。$$

鋼板因為質量遠大於小球，與小球撞擊後所損失的速度可忽略不計，因此以全程都是自由落下來計算。落下總時間為$t_1+t_2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{h}{g}}$，所以鋼板高度為

$$h-\frac{1}{2}g(t_1+t_2)^2=\left(2\sqrt{3}-3\right)h\ 。$$

【第六題參考解】

液體在半圓區流過如圖 1

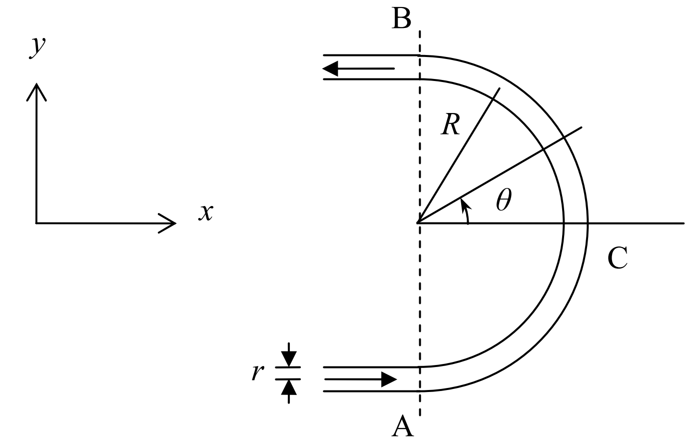


圖　1

由圖 2，圓弧上取一段長Δs，液體質量Δm，受向心力$\dfrac{\Delta m v^2}{R}$

由圖 3，許多微小的力向量合成一圓弧，大小為總量的$\dfrac{2}{\pi}$倍

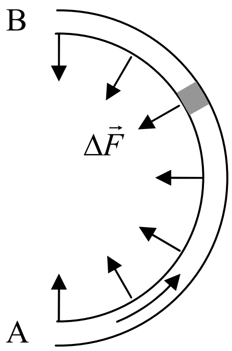


圖　2

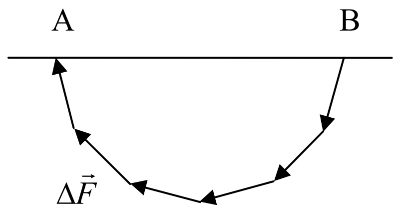


圖　3

向心力合向量在 $-x$ 方向，大小為

$$\frac{2}{\pi}\Delta m\frac{v^2}{R}=\frac{2}{\pi}\frac{v^2}{R}\rho\pi\ r^2\pi R=2\rho\pi\ r^2v^2 \qquad (1)$$

在Δt時間 A 處的$v\Delta m$動量變成 B 處的$-v\Delta m$動量

$$\text{液體受力} = 2v\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{2v\rho\pi r^2 v\Delta t}{\Delta \mathrm{t}}=2\rho\pi\ r^2v^2 \qquad (2)$$

同(1)

由圖 4，液體沿彎管受粘滯力f，合力為向下的阻力$\dfrac{2f}{\pi}$

液體在 B 處壓力P_B，在 A 處壓力$P_A=P_B+\Delta P=P_B+\dfrac{f}{\pi r^2}$

可視為 A 處壓力為$(P_B+\frac{\Delta P}{2})+\frac{\Delta P}{2}$，B 處壓力為$(P_B+\frac{\Delta P}{2})-\frac{\Delta P}{2}$

其中$P_B+\frac{\Delta P}{2}$在彎管內各處為均勻壓力不產生力。$\frac{\Delta P}{2}$在 A 處造成對液體的推力$\frac{f}{2}$。因粘滯力的消耗沿圓弧推力漸減，在 C 處不受推力，過 C 處吸力漸增。$-\frac{\Delta P}{2}$在 B 處造成對液體的吸力$\frac{f}{2}$，液體沿圓弧受力f（見圖 5）。

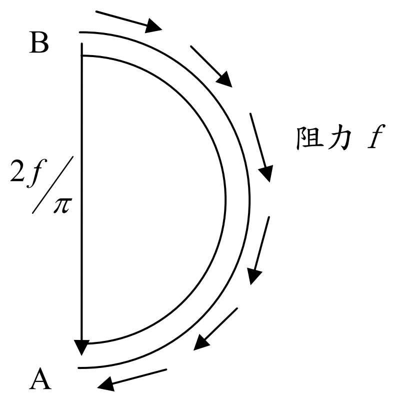


圖 4

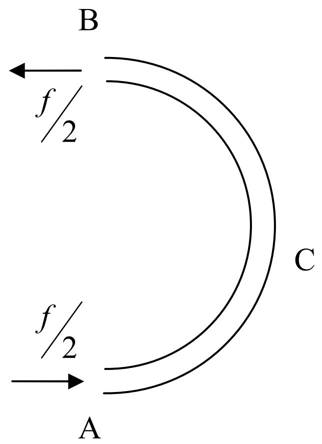


圖 5

由圖 6，AC 段液體在θ角取$\Delta\theta$範圍，兩邊各受推力$f'=\frac{f}{\pi}(\theta+\frac{\Delta\theta}{2})$和$f'=\frac{f}{\pi}(\theta-\frac{\Delta\theta}{2})$。此範圍在圓弧切線方向受推力$\frac{f\Delta\theta}{\pi}$，和粘滯阻力$\frac{f\Delta\theta}{\pi}$相抵消。二邊推力與此段中點的切線成夾角皆為$\frac{\Delta\theta}{2}$，產生$\hat{\mathrm{R}}$方向的作用力$2f'\sin(\frac{\Delta\theta}{2})\cong\frac{f\theta}{\pi}\Delta\theta$，此力由彎管的抗力抵消。

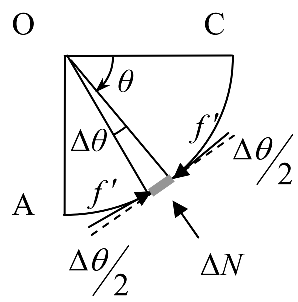


圖 6

AC 段抗力的y分量為$\frac{f}{\pi}\sum\theta\sin\theta\ \Delta\theta$。若取

$\sin\theta\cong 1$，則$0<\theta<\frac{\pi}{2}$區間的$\sum$值接近$\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$

而$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$區間多算的$\sum$值接近$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi^2}{36}$

故$0<\theta<\frac{\pi}{2}$區間的$\sum$值接近$\frac{7\pi^2}{8\times 9}\cong 0.96$。

x分量則為$-\frac{f}{\pi}\sum\theta\cos\theta\ \Delta\theta$。

由圖 7，BC 段液體在θ角取$\Delta\theta$範圍，兩邊各受拉力$f'=\frac{f\theta}{\pi}$。此二力與此

段中點的切線夾角皆為$\frac{\Delta\theta}{2}$。產生$-\hat{\mathrm{R}}$方向的力$2f'\sin(\frac{\Delta\theta}{2})\cong\frac{f\theta}{\pi}\Delta\theta$。BC 段抗力的$y$分量為$\frac{f}{\pi}\sum\theta\sin\theta\ \Delta\theta$，$x$分量則為$\frac{f}{\pi}\sum\theta\cos\theta\ \Delta\theta$。

此二段抗力的y分量的和應為$\frac{2f}{\pi}$，x分量則互相抵消。

彎管內整個液體受外力如圖 8。

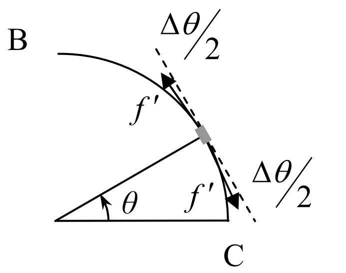


圖 7

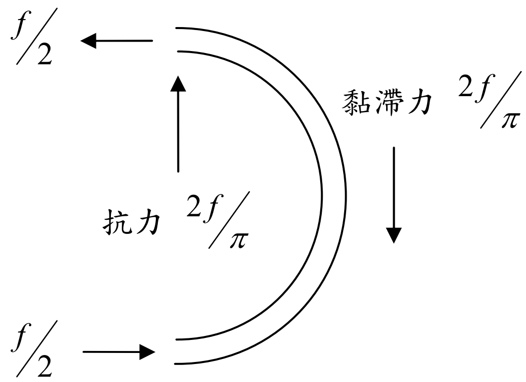


圖 8

附微積分解法

見圖 6，由 C 處出發，在θ處取$\Delta\theta$。圓弧運動的推力$f'=\frac{f}{2}\cdot\frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}=\frac{f\theta}{\pi}$

抗力$\Delta N=2f'\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cong f'\Delta\theta=\frac{f\theta}{\pi}\Delta\theta$

AC 段抗力的y分量為

$$N_{y,\mathrm{AC}}=\int_0^{\pi/2}\frac{f\theta}{\pi}\sin\ \theta\ \mathrm{d}\theta=-\frac{f}{\pi}\int_0^{\pi/2}\theta\ \mathrm{d}\cos\ \theta=\frac{-f}{\pi}(\theta\ \cos\theta\ \Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta)$$

$$=-\frac{f}{\pi}(0-\sin\ \theta\Big|_0^{\pi/2})=\frac{f}{\pi}$$

同理 CB 段抗力的分量也是$\frac{f}{\pi}$，抗力的總共y分量為$\frac{2f}{\pi}$。

【第七題參考解】

(1) 初始時球半徑 $r_0 = 15\text{ cm} \Rightarrow R_0 = \dfrac{r_0}{5\text{ cm}} = 3$，故在海平面時的氣球內初始壓力為

$$P_{i0} = \left[1 + 0.03\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^7}\right)\left(1 + 0.1\times 3^2\right)\right] \approx 1.01897\text{ (atm)}$$

在高度 h 公里時，球半徑為 r，升空過程為絕熱($\gamma = 7/5$)，得球內壓為

$$P_i = P_{i0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]^{7/5} \approx 1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}\text{ (atm)}$$

此時球外大氣壓力為

$$P_a = P_i - P_b = P_i - 0.03\left(R^{-1} - R^{-7}\right)\left(1 + 0.1\times R^2\right)$$

故此時高度為

$$h = \frac{1 - P_a}{0.11} = \frac{1 - 1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5} + 0.03\left(R^{-1} - R^{-7}\right)\left(1 + 0.1\times R^2\right)}{0.11}$$

由於靜力平衡： $4\pi r t = \pi r^2 P_b$

故可得氣球所受表面張力為 $t = \dfrac{r}{4}P_b$

破掉時的極限為

$$\frac{r}{4\times 100}0.03\left(R^{-1} - R^{-7}\right)\left(1 + 0.1\times R^2\right)\times 101325 = 75\text{ N/m}$$

$$\Rightarrow r\left(\frac{1}{R} + 0.1\times R\right) \approx 9.86923 \Rightarrow 5 + 0.02r^2 \approx 9.86923 \Rightarrow r \approx 15.6\text{ (cm)}$$

此時高度為

$$h = \frac{1 - 1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5} + 0.03\left(R^{-1} - R^{-7}\right)\left(1 + 0.1\times R^2\right)}{0.11} \approx 1.4\text{ (km)}$$

球內溫度為 $T_i = T_{i0}\left(\dfrac{V_0}{V}\right)^{\gamma - 1} = T_{i0}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{6/5} = 290\left(\dfrac{15}{15.6}\right)^{6/5} \approx 276.7(K)$

球外溫度為 $T_a = 290 - 6.5\,h \approx 280.9\text{ (K)}$

故球內外溫差為 $T_a - T_i \approx 4.2(K)$

(2) 因為是可逆絕熱膨脹，所以內能的總變化量＝－球內氣體對外所作的功

$$= -\int_{V_0}^{V} P\,dV = -\int_{V_0}^{V} P_{i0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{7/5} dV = \frac{5}{2}P_{i0}V_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/5}\Bigg|_{V_0}^{V} = \frac{5}{2}\left(P_iV - P_{i0}V_0\right)$$

$$= \frac{5}{2}nR\left(T_i - T_{i0}\right) = \frac{5}{2}\frac{P_{i0}V_0}{T_{i0}}\left(276.7 - 290\right)$$

$$= \frac{5}{2}\frac{1.01897\times\frac{4\pi}{3}15^3}{290}\left(276.7 - 290\right)\times\frac{101325}{10^6}\text{(J)}$$

$$\approx 167\text{(J)}$$

(3)球內密度為

$$\rho_i=\frac{P_iM_H}{RT_i}=1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}\frac{2\ \text{g}/\ell}{0.082\times 290\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6/5}}\approx 8.56997\times 10^{-5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3}\text{g/cm}^3$$

大氣密度為 $$\rho_a=\frac{P_aM_a}{RT_a}=\frac{\left[P_i-0.03\left(R^{-1}-R^{-7}\right)\left(1+0.1\times R^2\right)\right]28.8}{0.082\left(290-6.5h\right)\times 1000}\text{g/cm}^3$$

當到達最大高度時，浮力平衡重力：

$$\left(\rho_a-\rho_i\right)\frac{4\pi r^3}{3}=m_b$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\left(1-0.11h\right)28.8}{82\left(290-6.5h\right)}-8.57\times 10^{-5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3}\text{g/cm}^3\right\}\frac{4\pi r^3}{3}=15$$

又 $$h=\frac{1-1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}+0.03\left(\frac{5}{r}+0.1\times\frac{r}{5}\right)}{0.11}$$

代入消去 r 可解得 $h\approx 3.1$ (km)