

筆試試題（一）

編號：\_\_\_\_\_.

- 說明：(1) 請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。  
 (2) 本試題卷共七大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，  
 試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

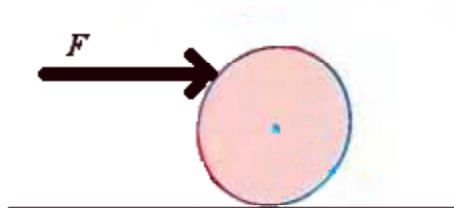
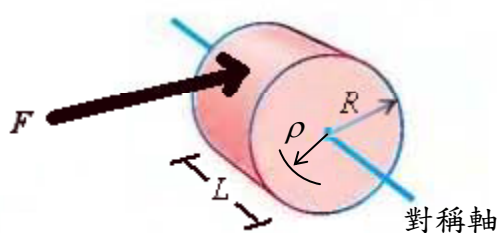
如圖示，一實心圓柱體，底圓半徑為  $R$ ，長度為  $L$ 。但其質量分布不均勻，質量密度  $\sigma(\rho) = \sigma_0 \rho$  ( $\rho$  為圓柱體上的點到對稱軸的距離， $\sigma_0$  為常數)。今有一力  $F$  水平作用於該圓柱體，請問該力要作用在何處，圓柱體才能完全滾動而不滑動？(20 分)

(必要時，可利用以下公式：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} )$$



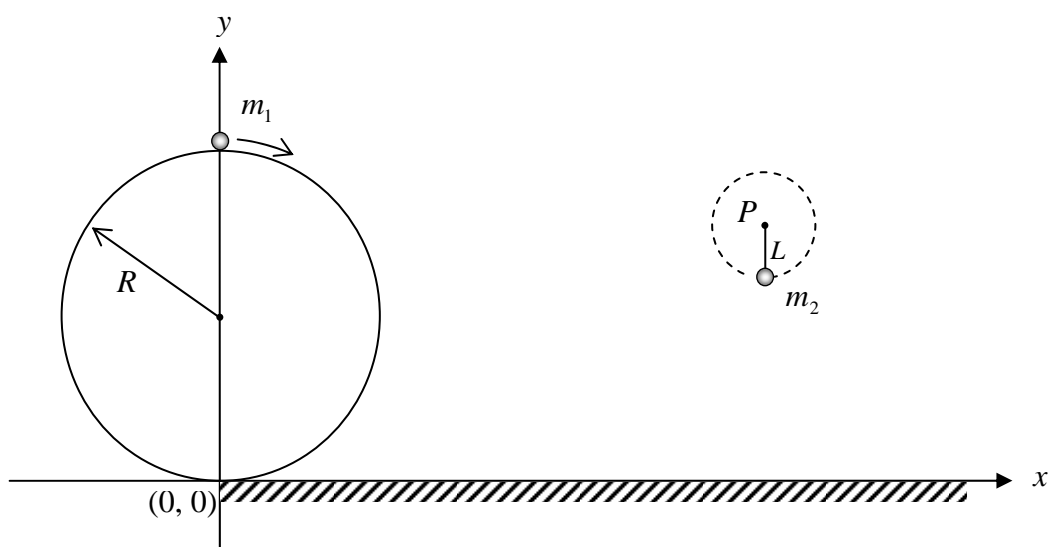
### 【第二題】

在室溫  $T = 300 \text{ K}$  下，將一密閉容器中之真空度降至  $1.0 \times 10^{-10}$  毫米水銀柱，請估計容器內氣體分子間之平均距離。（理想氣體常數  $R = 8.31 \frac{\text{焦耳}}{\text{莫耳} \cdot \text{K}}$ ）  
(20 分)

### 【第三題】

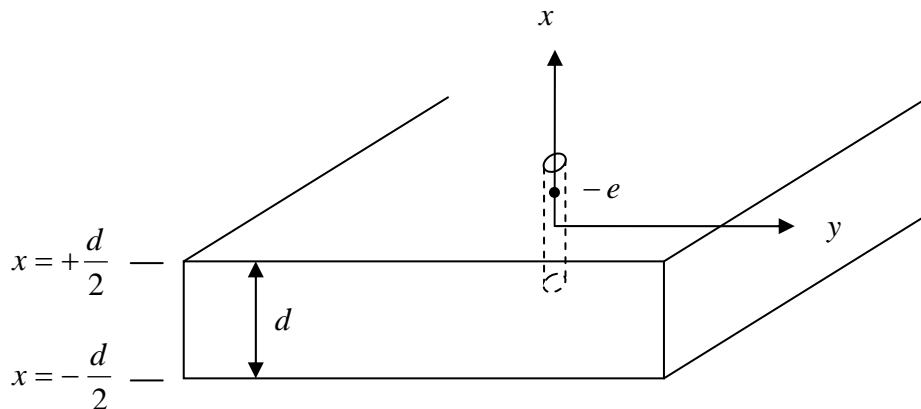
如圖示，一半徑為  $R$  的圓環垂直固定於水平地面，固定點為座標原點  $(0, 0)$ ，一質量為  $m_1$  之小球(體積不計)無摩擦地從圓環最高點開始沿圓環滑下，試求：

- (1) 小球離開圓環之瞬間，其速率為何？(4 分)
  - (2) 若小球墜地時與水平地面發生彈性碰撞(小球與地面接觸時間極短不計)，反彈後到達的最高點之座標為何？(4 分)
  - (3) 若  $m_1$  小球到達最高點時恰與另一顆質量為  $m_2$  之小球(體積不計)發生彈性碰撞，且質量為  $m_2$  之小球在碰撞前已被一長度為  $L$  之細繩(質量不計)靜止懸吊著。若欲使  $m_2$  小球在碰撞後繞細繩之固定處  $P$  點在鉛直面上做圓周運動，則繩長  $L$  之最大值為何？(6 分)
  - (4) 承(3)小題，在繩長  $L$  為最大值的情況下，請分別以三種方式求出小球繞行至最高點瞬間的速率？(6 分)
- (圓環半徑  $R = 27$  米，小球質量  $m_1 = m_2 = 1$  公斤，重力加速度  $g = 10 \frac{\text{米}}{\text{秒}^2}$ ，本題所牽涉之運動皆發生在  $x-y$  平面)



【第四題】

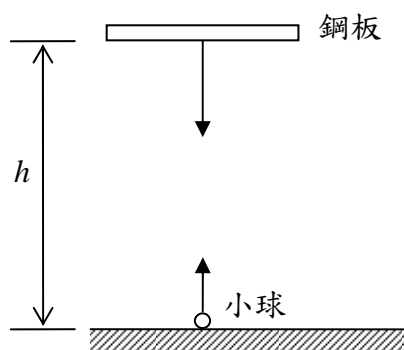
如圖示，一帶電體的介電常數為  $\epsilon$ ，內部電荷均勻分布，其體積電荷密度為  $+\rho$ ， $x$  方向上厚度為  $d$ ， $y$  與  $z$  方向上厚度為無限大。沿  $x$  軸挖一極為細長的小隧道，置入一帶電量為  $(-e)$ ，質量為  $m$  之粒子。若在  $x = x_0$  處 ( $0 < x_0 < \frac{d}{2}$ ) 釋放該粒子，試求該粒子的振盪週期。(20 分)



【第五題】

如圖示，質量為  $m$  的一小球，從高度為  $h$  的高處鉛直自由落下，當此球撞擊地面的同時，一片質量遠大於  $m$  的鋼板也從小球正上方高度為  $h$  的高處，板面保持水平在鉛直方向上自由落下。假設小球與地面及鋼板的撞擊是瞬間完全彈性碰撞，而且重力加速度為  $g$ 。請問

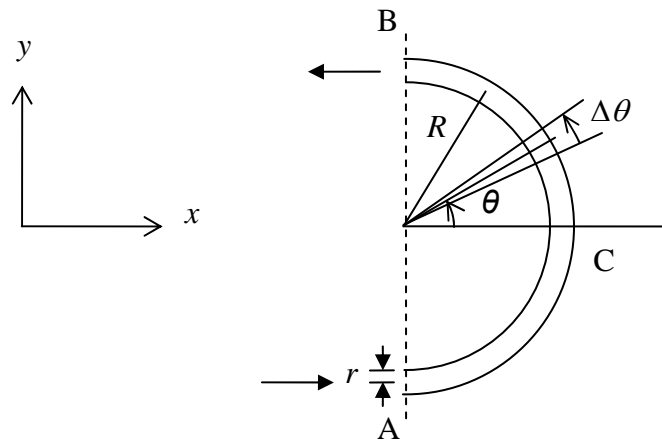
- (1) 小球第二次撞擊地面時的速率是多少？(10 分)
- (2) 承(1)小題，此時鋼板的高度是多少？(10 分)



**【第六題】**

如圖示，有一管，其管內半徑為  $r$ ，在 A 至 B 段為半圓形，曲率半徑為  $R$ ，且  $r \ll R$ 。將此管水平放置 ( $x-y$  平面為水平面)，密度  $\rho$  的液體在管中穩定流過，體積流量為  $\Delta V/\Delta t$ ，且通過一橫截面的平均流動速率為常數  $v$ 。已知液體在管內流動時，每流動單位長度所受的粘滯阻力為  $\frac{f}{\pi R}$ ，在彎管出口處的平均液體壓力為  $P_B$ 。

- (1) 在彎管的  $\theta$  角附近取很小的  $\Delta\theta$  段，試作圖表示並求出此  $\Delta\theta$  段液體所受的各種力的大小。(15 分)
- (2) 試作圖表示並求出整段彎管內液體所受的各種力的大小。(10 分)



**【第七題】**

考慮一橡皮氣球自海平面緩慢升空。假設大氣壓力  $P_a$  隨海拔高度  $h$  的變化為  $P_a = 1 - 0.11h$ ，且大氣溫度  $T_a$  隨海拔高度的變化為  $T_a = 290 - 6.5h$ ；式中  $P_a$  的單位為大氣壓(atm)， $T_a$  的單位為 K，而  $h$  的單位為公里。氣球自始至終皆為正圓球形，其橡皮的表面張力所造成的球內外壓力差為  $P_b = 0.03(R^{-1} - R^{-7})(1 + 0.1R^2)$  (單位為大氣壓)，其中  $R = \frac{r}{5\text{ cm}} \geq 1$ ，而  $r$  為球的半徑。初始時，在海平面上將氣球打入氫氣至半徑  $r = 15$  公分後釋放，釋放時氣球的內、外溫度相同，之後氣球便因浮力緩緩上升。橡皮氣球未充氣時的淨質量為 15 公克。假設氣球表面為絕熱，整個上升過程中氣球內的氣體經歷了可逆絕熱膨脹 (即球內氣體滿足關係式  $PV^\gamma = \text{常數}$ ，其中  $P$  為壓力， $V$  為體積，

$\gamma = \frac{7}{5}$ ), 而且大氣的對流可忽略。(1 大氣壓 = 101325 牛頓/米<sup>2</sup>)

- (1) 假設氣球的表面張力超過 75 牛頓/米時便會破掉, 求氣球破掉前的瞬間球內、外的溫差? (10%)
- (2) 續(1)題, 氣球在上升的整個過程中, 球內氣體在氣球破掉前其內能的總變化量為多少焦耳 (J)? (5%)
- (3) 假設氣球始終不會破, 求氣球所能到達的最大海拔高度? (10%)