教育部99學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（二）參考解

【第一題參考解】

(1) 由繩波波速公式：$v=\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$

其中 F 為繩之張力、μ 為繩之線密度

而兩繩之張力為懸掛物重之一半，即：$F_1=F_2=\dfrac{Mg}{2}$

可得兩繩上的繩波波速 v_1、v_2 分別為：

$$v_1=\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}=\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_1}} \text{、} v_2=\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}=\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_2}}$$

(2) 於繩上形成駐波之條件為：兩定點之間距為繩波半波長之整數倍，即：

$$d=m\frac{\lambda}{2} \text{、} m\in N$$

利用 $v=f\lambda$ 改寫條件為：

$$d=m\frac{v}{2f_m}$$

繩上可產生的駐波頻率為：

$$f_m=m\frac{v}{2d}$$

得繩 L_1 及繩 L_2 可能產生的駐波頻率分別為：

$$f_{1m}=m\frac{v_1}{2d_1}=\frac{m}{2d_1}\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_1}} \text{、} f_{2n}=n\frac{v_2}{2d_2}=\frac{n}{2d_2}\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_2}}$$

(3) 繩 L_1 基音與繩 L_2 的第二泛音相同，即需滿足條件：

$$f_{11}=f_{23}$$

此時 $F_1=M_1g$、$F_2=M_2g$，代入上述駐波頻率計算結果得：

$$\frac{1}{2d_1}\sqrt{\frac{M_1g}{\mu_1}}=\frac{3}{2d_2}\sqrt{\frac{M_2g}{\mu_2}}$$

式子兩邊平方再消去相同變數得：

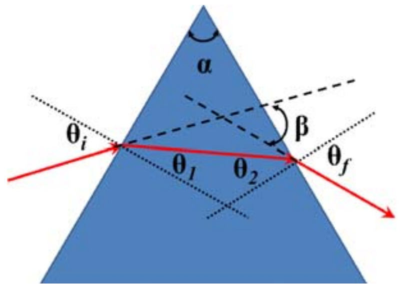
$$1\frac{M_1}{d_1^2\mu_1}=9\frac{M_2}{d_2^2\mu_2} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2}=9\frac{d_1^2\mu_1}{d_2^2\mu_2}$$

【第二題參考解】

分析幾何關係

$$\begin{cases}(90^0-\theta_1)+\alpha+(90^0-\theta_2)=180^0\\ \beta=(\theta_i-\theta_1)+(\theta_f-\theta_2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\theta_1+\theta_2\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}$$



(1) 無法從右側出射之限制條件為：右側介面發生全反射

$$\begin{cases}n\sin\theta_2\geq 1\\ \alpha=\theta_1+\theta_2\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_2\geq\sin^{-1}\dfrac{1}{n}\\ \alpha=\theta_1+\theta_2\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1\leq\alpha-\sin^{-1}\dfrac{1}{n}\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\theta_i\geq\sin^{-1}\left[n\sin\left(\alpha-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)\right]\qquad\text{且}\ \sin\left(\alpha-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$$

(2)

$$\begin{cases}n\sin\theta_2=\sin\theta_f\\ \alpha=\theta_1+\theta_2\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_f=\sin^{-1}\left[n\sin(\alpha-\theta_1)\right]\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{n}\sin\theta_i\\ \cos\theta_1=\left[1-\left(\dfrac{1}{n}\sin\theta_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\theta_f=\sin^{-1}\left\{n\sin\alpha\left[1-\left(\dfrac{1}{n}\sin\theta_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\sin\theta_i\cos\alpha\right\}\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\beta=\theta_i+\sin^{-1}\left[\left(n^2-\sin^2\theta_i\right)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha-\sin\theta_i\cos\alpha\right]-\alpha$$

(3)

$$\begin{cases} n\sin\theta_2 = \sin\theta_f & (1) \\ \alpha = \theta_1 + \theta_2 & (2) \\ \sin\theta_i = n\sin\theta_1 & (3) \\ \beta = \theta_i + \theta_f - \alpha & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} a\quad \text{minimum}\quad \text{deviation}: \left(\frac{d\beta}{d\theta_i}\right)=0 \Rightarrow \frac{d\theta_f}{d\theta_i}=-1 \\ \frac{d(\text{式}2)}{d\theta_i}\ \text{式}2\text{對}\theta_i\text{微分}=0 \Rightarrow \frac{d\theta_2}{d\theta_i}=-\frac{d\theta_1}{d\theta_i} \end{cases}} \begin{cases} \frac{d(\text{式}1)}{d\theta_i}\text{式}1\text{對}\theta_i\text{微分} \Rightarrow -\cos\theta_f = n\cos\theta_2\frac{d\theta_2}{d\theta_i} \\ \frac{d(\text{式}3)}{d\theta_i}\text{式}3\text{對}\theta_i\text{微分} \Rightarrow \quad \cos\theta_i = n\cos\theta_1\frac{d\theta_1}{d\theta_i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2\cos\theta_i = \cos\theta_1\cos\theta_f$$

$$\Rightarrow (1-\sin^2\theta_2)(1-n^2\sin^2\theta_1) = (1-\sin^2\theta_1)(1-n^2\sin^2\theta_2)$$

If $n \neq 1 \Rightarrow |\sin\theta_1| = |\sin\theta_2| \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \theta_i = \theta_f$

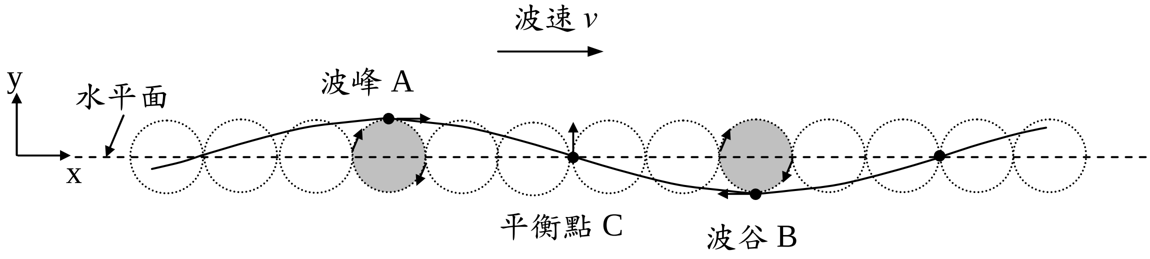
$$\Rightarrow \gamma = 2\theta_i - \alpha$$

(4)

$$\begin{cases} \gamma = 2\theta_i - \alpha \\ \sin\theta_i = n\sin\frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

【第三題參考解】

(1) 由圖 1(a)可看出水波在深水區傳播時，由於水體底面未受擾動，故水波的傳播速率應和深度 h 無關。參考下圖所示，A、B 和 C 分別為水面上波峰、波谷和平衡點的位置。從設於地面的參考坐標系來看，A 和 B 兩處的水質點在水平方向的速度分量分別為 u (向右)和 $-u$ (向左)，u 為水質點作圓運動的切線速率，其在鉛直方向的速度分量為零。假設一觀察者以與波速 v 相同的速度運動，則此觀察者將可見到一靜止在水面上的波形。從觀察者的參考坐標系來看，靠近水面的水質點順著波形由右向左流動。A 和 B 兩點的速度分別為



$$v_A = u - v = -(v-u) \qquad (1)$$

$$v_B = -u - v = -(v+u) \qquad (2)$$

取水平面為重力位能的零點，利用白努利方程式可得

$$p + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g a = p + \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho g a \qquad (3)$$

式中 a 為水質點作圓運動的半徑。將(1)和(2)兩式代入(3)式，得

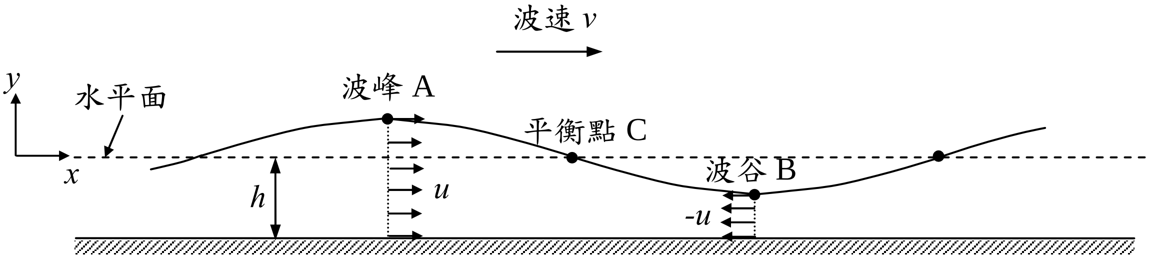
$$(v+u)^2 - (v-u)^2 = 4ga \quad \Rightarrow \quad uv = ga \qquad (4)$$

由於 u 為水質點沿切線方向上的運動速率，故 $u = a\omega$，式中 ω 為水波的角頻率，以之代入(4)式，可得

$$(a\omega)v = ga \quad \Rightarrow \quad \omega v = g \qquad (5)$$

因為 $\omega = 2\pi f = 2\pi \dfrac{v}{\lambda}$，代入上式，得 $v = \sqrt{\dfrac{\lambda g}{2\pi}}$ 。

(2) 參看下圖所示水波在淺水區的傳播情形，此時位在同一鉛直線上的水質點皆以同一速度運動。仿照上題的解法，設一觀察者以與波速 v 相同的速度運動，則從觀察者的參考坐標系來看，水質點順著波形由右向左流動，A 和 B 兩處的速度分別為 $v_A = -(v-u)$ 和 $v_B = -(v+u)$ 。取水平面為重力位能的零點，利用白努利方程式，可得



$$p+\frac{1}{2}\rho(v-u)^2+\rho gb=p+\frac{1}{2}\rho(v+u)^2-\rho gb \quad \Rightarrow \quad uv=gb \qquad (6)$$

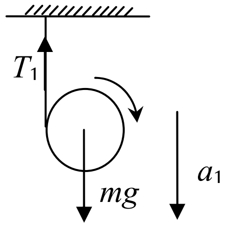
式中 b 為水波的振幅。利用流體的連續方程式，可得

$$(v-u)(h+b)=(v+u)(h-b) \quad \Rightarrow \quad vb=uh \qquad (7)$$

由(6)和(7)兩式消去 b，可得 $v=\sqrt{gh}$ 。

【第四題參考解】

(1) 由線量型牛頓第二定律



$$mg - T_1 = ma_1$$

通過圓盤軸心的轉動，應用角量型牛頓第二定律

$$T_1 R = I\alpha_1$$

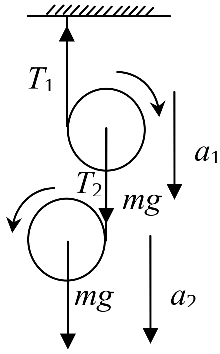
角加速度和線加速度的關係為：

$$a_1 = \alpha_1 R \qquad\qquad T_1 = \frac{1}{2} m a_1$$

由上三式可得

$$a_1 = \frac{g}{1 + I/mR^2} = \frac{2}{3} g$$

(2) 由線量型牛頓第二定律



$$mg + T_2 - T_1 = ma_1$$

$$mg - T_2 = ma_2$$

通過圓盤軸心的轉動，應用角量型牛頓第二定律

$$T_1 R = I\alpha_1 = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_1$$

$$T_2 R = I\alpha_2 = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_2$$

角加速度和線加速度的關係為：

$$a_1 = \alpha_1 R \qquad\qquad T_1 = \frac{1}{2} m a_1$$

$$a_2 = \alpha_2 R + a_1 \qquad\qquad T_2 = \frac{1}{2} m(a_2 - a_1)$$

由上三式可得

$$4a_1 - a_2 = 2g \qquad -a_1 + 3a_2 = 2g$$

$$a_1 = \frac{8}{11} g, \quad a_2 = \frac{10}{11} g$$

(3) 由線量型牛頓第二定律

$$mg + T_2 - T_1 = ma_1$$

$$mg + T_3 - T_2 = ma_2$$

$$mg - T_3 = ma_3$$

通過圓盤軸心的轉動，應用角量型牛頓第二定律

$$T_1R = I\alpha_1 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_1$$

$$T_2R = I\alpha_2 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_2$$

$$T_3R = I\alpha_3 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_3$$

角加速度和線加速度的關係為：

$$a_1 = \alpha_1 R \qquad\qquad T_1 = \frac{1}{2}ma_1$$

$$a_2 = \alpha_2 R + a_1 \qquad\qquad T_2 = \frac{1}{2}m(a_2 - a_1)$$

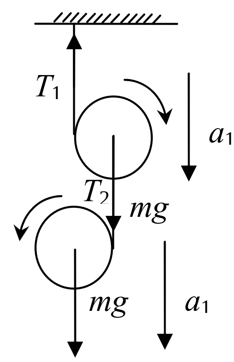
$$a_3 = \alpha_3 R + a_2 \qquad\qquad T_3 = \frac{1}{2}m(a_3 - a_2)$$

由上三式可得

$$4a_1 - a_2 = 2g \qquad -a_1 + 4a_2 - a_3 = 2g \qquad -a_2 + 3a_3 = 2g$$

$$a_1 = \frac{30}{41}g, \quad a_2 = \frac{38}{41}g, \quad a_3 = \frac{40}{41}g$$

(4) 設系統包含 N 個串聯圓盤，如圖所示，從上向下對圓盤編上號碼。第 k 號圓盤受到第 k 根線向上拉力 T_k、向下重力 mg 以及第$(k+1)$線向下拉力 T_{k+1}。列出第 k 個圓盤運動方程式



$$mg + T_{k+1} - T_k = ma_k \qquad (1)$$

式中 a_k 為環質心加速度在運動方向上加速度分量。對於任何圓盤都適用。因為第$(N+1)$號線根本就不存在，所以 $T_{N+1} = 0$（由此可見，對於 $k = 1 \sim N$，我們列出 N 個方程式，這 N 個方程中含有 $2N$ 個未知量 (a_k, T_k)。

$$T_kR = I\alpha_k = \frac{1}{2}mR^2\alpha_k$$

$$a_k = R\alpha_k + a_{k-1}, \qquad k = 1 \sim N$$

可得 $T_k = \frac{1}{2}m(a_k - a_{k-1})$

從這方程式中將表示拉力式子代入(1)方程式，最後得到

$$-a_{k-1} + 4a_k - a_{k+1} = 2g, \qquad k = 1 \sim N \qquad (2)$$

在這方程組中應該認為 $a_0 = 0$，因為這是第一個圓盤懸掛點的加速度。沒有第$(N+1)$根線，$T_{N+1} = 0$，所以 $a_{N+1} = a_N$

現在根據(2)式以展開形式列出對於三個圓盤情況下方程組

$$4a_1 - a_2 = 2g$$
$$-a_1 + 4a_2 - a_3 = 2g \qquad (3)$$
$$-a_2 + 3a_3 = 2g$$

解此方程組，得到

$$a_1 = \frac{30}{41}g，\ a_2 = \frac{38}{41}g，\ a_3 = \frac{40}{41}g$$

注意，在 N 為任意有限值的情況下，方程式(2)均可以解答。顯然當 N 增加時計算難度增大。假如 $N \to \infty$，又會怎樣呢？這就是我們要討論的問題，它對於即使 $N \to \infty$ 情況也是正確的。

假設第一個圓盤的加速度等於

$$a_1 = cg \qquad (4)$$

式中 c 是某一常數，它是我們需要確定的。現在過渡到以加速度 a_1 運動的座標系裡，在此加速座標系裡描述所有圓盤的運動。從第二個圓盤開始，這與我們原來的問題相似，區別只是在等效重力加速度為 g' 的引力場中進行運動。

$$g' = g - a_1 = g(1-c)$$

圓盤的總數減少 1。因為按照前面圓盤很多，自然認為上邊(第二個) 圓盤的加速度等於

$$a_1' = cg'$$

因而，在靜止參照系裡第二個圓盤的加速度等於

$$a_2 = a_1' + a_1 = cg' + cg = c(g' + g) = cg(2-c) \qquad (5)$$

將表示 a_1 和 a_2 的(4)和(5)式代入方程組(3)第一個方程中，求出 c

$$c^2 + 2c - 2 = 0，$$

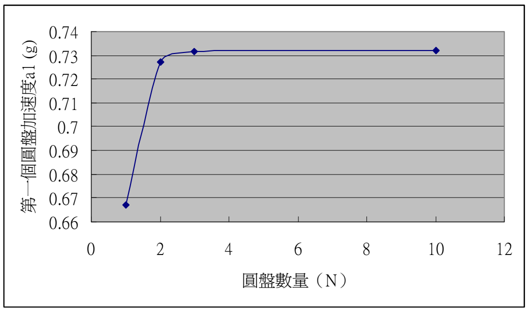
得 $\quad c = \sqrt{3} - 1$

由此可見，當 N 足夠大時，第一個圓盤的加速度等於

$$a_1 = (\sqrt{3}-1)g$$

綜合以上結果，第一個圓盤的加速度：

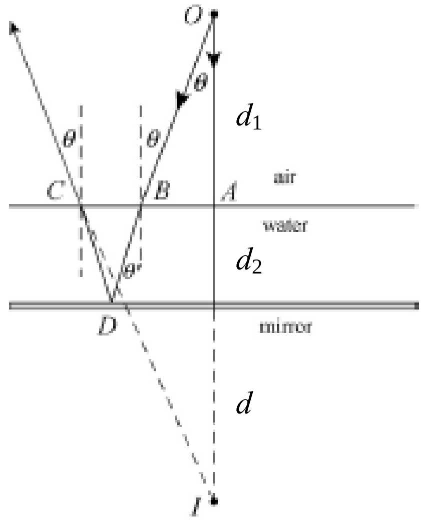
N=1	$a_1 = 2g/3 = 0.667g$
N=2	$a_1 = 8g/11 = 0.727g$
N=3	$a_1 = 30g/41 = 0.7317g$
$N \to \infty$	$a_1 = (\sqrt{3}-1)g \sim 0.73205g$



雖然圓盤數量越多，第一個圓盤的加速度越快，但在數量為多於兩個圓盤串聯後，第一個圓盤的加速度，就不太會增加了，而趨近 $a_1 = (\sqrt{3}-1)g$ 。

【第五題參考解】

如圖所示，利用兩條光線的交點，可求得燈泡成像的位置。



藉由 Snell's Law，在水與空氣的介面上，可以得到入射角 θ 與折射角 θ' 的關係為

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_w}{n_{air}}$$

(由於 θ 與 θ' 皆非常的小，且 $n_{air}=1$)

因此可化簡成 $\theta\approx n_w\theta'$

燈泡的位置為 O 點，位於水面上高度為 $d_1=250\,cm$ 的距離，而水面下深度為 $d_2=200\,cm$ 的底部為一面大鏡子，燈泡所成的像位於 I 處，假設 I 位於鏡面下 d 處。

在三角形 OAB 中

$$|AB|=d_1\tan\theta\approx d_1\theta$$

而在三角形 CBD 中

$$|BC|=2d_2\tan\theta'\approx 2d_2\theta'\approx 2d_2\frac{\theta}{n_w}$$

所以，在三角形 ACI 中，，因此

$$d=|AI|-d_2=\frac{|AC|}{\tan\theta}-d_2\approx\frac{|AB|+|BC|}{\theta}-d_2=\left(d_1\theta+\frac{2d_2\theta}{n_w}\right)\frac{1}{\theta}-d_2$$

$$=d_1+\frac{2d_2}{n_w}-d_2=250\,cm+\frac{2(200\,m)}{\frac{4}{3}}-200\,cm=350\,cm$$

【第六題參考解】

$$m\ddot{\vec{x}} = -k\ddot{\vec{x}} + \frac{RQ^2}{(L+x)^2}\hat{x} = -k\vec{x} + \frac{RQ^2}{L^2(1+\frac{x}{L})^2}\hat{x}$$

$$\approx -k\vec{x} + \frac{RQ^2}{L^2}(1-\frac{2}{L}x)\hat{x} = -(k+\frac{2RQ^2}{L^3})\vec{x} + \frac{RQ^2}{L^2}\hat{x}$$

$$\therefore -m\omega^2 = -(k+\frac{2RQ^2}{L^3})$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}(1+\frac{2RQ^2}{kL^3})$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}(1+\frac{2RQ^2}{kL^3})} \approx \omega_0(1+\frac{RQ^2}{kL^3})$$

$$\therefore \frac{\omega}{\omega_0} = 1+\frac{RQ^2}{kL^3}$$

【第七題參考解】

(1) 表面張力的效應可忽略，且$h >> \lambda$，故由圖(a)知：$\tanh\left(2\pi h / \lambda\right) \approx 1$，所以表面重力波的形式可以寫成：$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$。速度可以寫成：$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$，因而可以得到$\omega^2 = k \times g$，微分後可以得到$2\omega d\omega = dk \times g$，故群速度可以寫成：

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}v$，所以群速度是速度的$\frac{1}{2}$倍。

(2) 重力的效應可忽略，且$h >> \lambda$，故由圖(a)知：$\tanh\left(2\pi h / \lambda\right) \approx 1$，所以表面張力波的形式可以寫成：$v = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$。速度可以寫成：$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}}$，因而可以得到$\omega^2 = k^3 \times \frac{\gamma}{\rho}$，微分後可以得到$2\omega d\omega = 3k^2 dk \times \frac{\gamma}{\rho}$，故群速度可以寫成：

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3k^2}{2\omega}\frac{\gamma}{\rho} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}} = \frac{3}{2}v$，所以群速度是速度的$\frac{3}{2}$倍。

(3) 海嘯產生時，波長較海水的深度大很多，即$h << \lambda$，$\tanh\left(2\pi h / \lambda\right) \approx 2\pi h / \lambda$，故海嘯波速可以寫成：$v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right) \times \tanh\left(2\pi h / \lambda\right)} \approx \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right) \times \left(2\pi h / \lambda\right)} = \sqrt{g \times h}$，也就是$v = \sqrt{g \times h} = \frac{\omega}{k}$，故海嘯波速僅與重力加速度和海水深度有關，所以群速度等於速度。