

筆試試題（二）

編號：_____.

- 說明：(1) 請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
(2) 本試題卷共七大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，
試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

如圖 1 所示，兩繩 L_1 及 L_2 繫在一起後，經定滑輪及動滑輪懸吊一質量為 M 之懸吊物。其中繩 L_1 的線密度為 μ_1 ，而繩 L_2 的線密度為 μ_2 。兩定滑輪距牆上繫繩端點的距離分別為 d_1 與 d_2 。兩繩所受的張力來自於下方動滑輪上的懸吊物（忽略動滑輪質量），懸吊物重量遠大於兩繩重量，故兩繩重量可忽略不計。請問：

- (1) 若於繩 L_1 及繩 L_2 上產生繩波，兩繩上的繩波波速 v_1 與 v_2 各為何？(5%)
- (2) 當繩波於定滑輪及牆上端點間形成駐波時，於繩 L_1 及繩 L_2 上可能產生的駐波頻率分別為何？(5%)
- (3) 如圖 2 所示，若將懸吊物切成兩塊，質量分別為 M_1 及 M_2 ，分別用繩 L_1 及繩 L_2 經由定滑輪懸吊。請求出當繩 L_1 上產生的基音頻率與繩 L_2 上產生的第二泛音頻率相同時，兩塊懸吊物之質量比 M_1/M_2 。(10%)

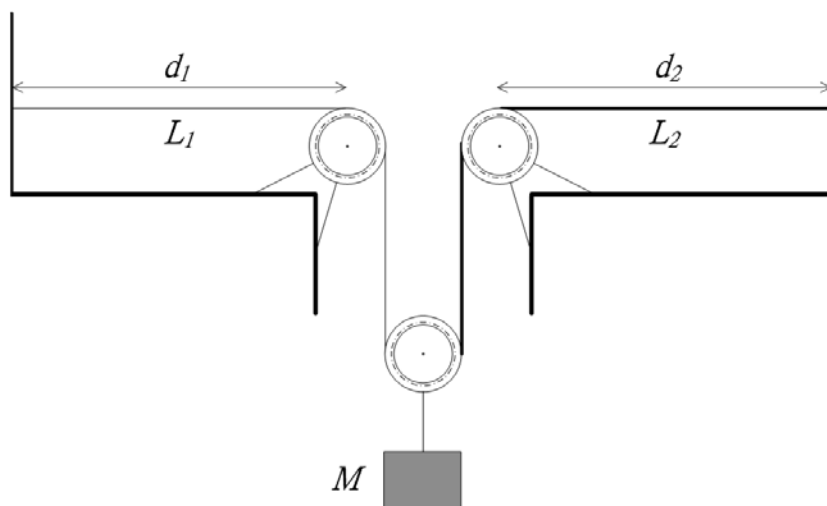


圖 1

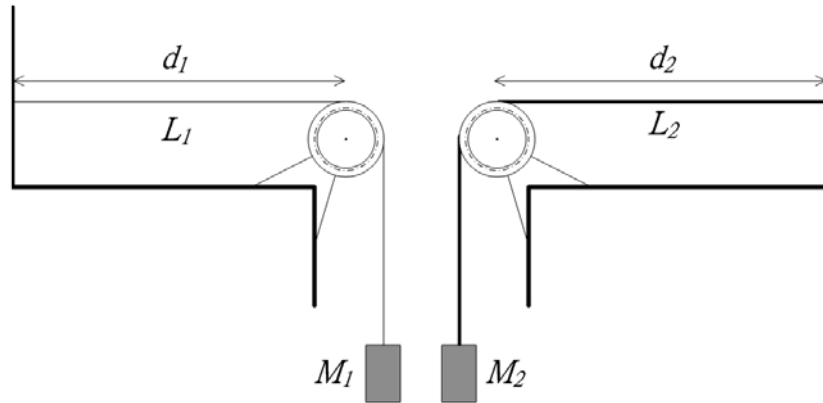
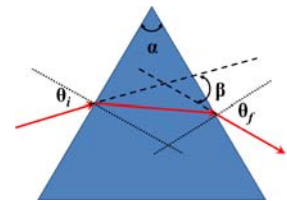


圖 2

【第二題】

有一道光從稜鏡左側入射，入射角為 θ_i ($0^\circ < \theta_i < 90^\circ$)，如圖所示。其中射出光線與原入射光線行進方向之夾角稱為偏向角 β ，稜鏡的頂角為 α ，且稜鏡折射率與空氣折射率之比值為 n 。請回答下列問題：

- (1) 試求入射角 θ_i 的條件，使得光經過兩次折射後，可由右側射出（以 n 及 α 表示之）。(4 分)
- (2) 試將偏向角 β 表示為入射角 θ_i 及頂角 α 的函數。(7 分)
- (3) 在某一個入射角 θ_i 時，偏向角為最小，請推導求出此最小偏向角 γ （以發生最小偏向角時之入射角 θ_i 及頂角 α 表示之）。(7 分)
- (4) 透過實驗量測，可以找出最小偏向角 γ ，由此可以反推求出 n 值。請推導並將 n 表示為 γ 及 α 的函數 $n(\gamma, \alpha)$ 。(7 分)



【第三題】

當水波以速率 v 在水面上傳播時，由於水極難壓縮，因此當水波通過時，水質點不僅在原處作鉛直方向的簡諧振動，它也在水平方向上作簡諧振動，而且這兩個振動的週期必須相等，才能維持一定的波動形狀。圖 1 所示為平面水波在不同深度的水區傳播時，水質點的運動情形（圖中 h 為水深， λ 為水波的波長）：圖(a)為在深水區($h \gg \lambda$)時，水質點做圓運動，但圓半徑則隨水深的增加而迅速

遞減；圖(b)為在中間深度的水區時，水質點做橢圓運動，其在鉛直方向的振幅，因受水底面的影響，其隨水深遞減的幅度大於其沿水平方向的振幅；圖(c)為在淺水區($h \ll \lambda$)時，水質點僅作水平方向上的直線振動，且位在同一鉛直線的水質點以同一速度運動。

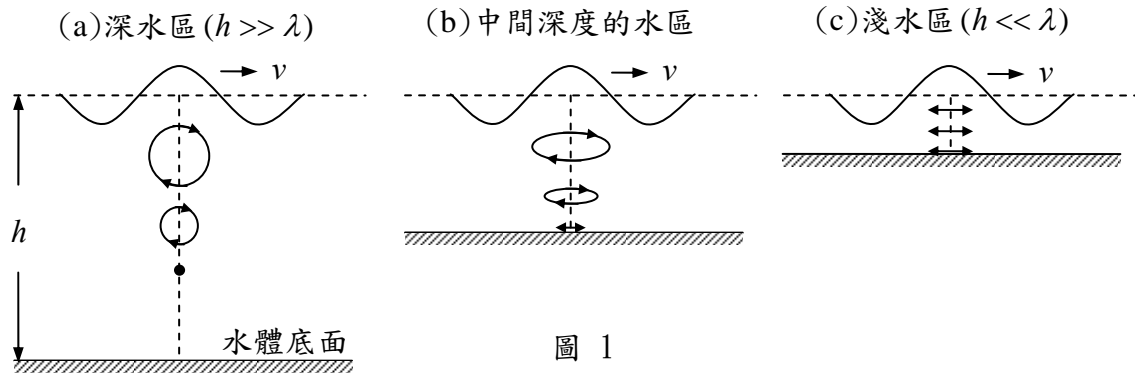


圖 1

圖 2 所示為水波在深水區傳播時，靠近水面處的水質點的連續運動情形。

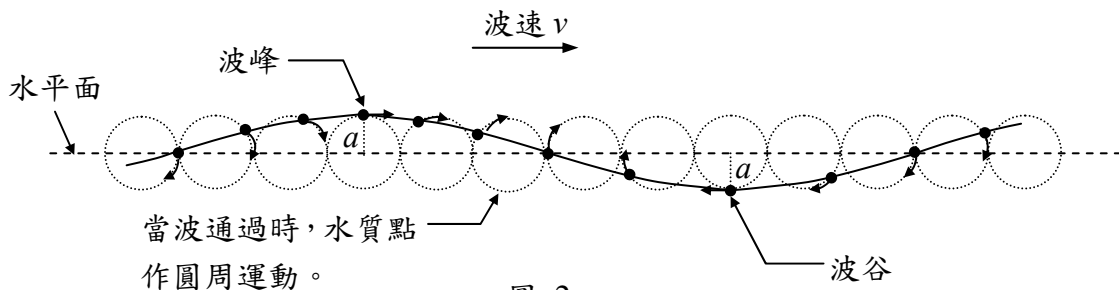


圖 2

根據上述的說明，回答下列問題：

(1) 導出水波在深水區($h \gg \lambda$)傳播時，其傳播速率 v 和波長 λ 之間的關係式。

(10 分)

(2) 導出水波在淺水區($h \ll \lambda$)傳播時，其傳播速率 v 和深度 h 之間的關係式。

(10 分)

【提示】：利用白努利方程式 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{常數}$ 。

【第四題】

一條輕細繩一端纏繞在一個均勻的圓盤邊緣，圓盤的半徑為 R ，質量為 M ，細繩的另一端固定在天花板上（如圖 1）。

（圓盤對其中心軸的轉動慣量為 $I = \frac{1}{2}MR^2$ ）

(1) 當放開圓盤，讓圓盤鉛直掉下，求圓盤運動的加速度。(5 分)

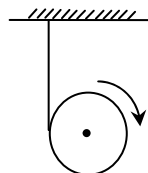


圖 1

(2) 若有兩個這樣的圓盤串聯在一起（即纏繞在下方圓盤細繩的另一端固定在上方鄰接圓盤的中心軸，如圖 2），當兩個圓盤同時放開，試分別求出兩個圓盤運動的加速度。(5 分)

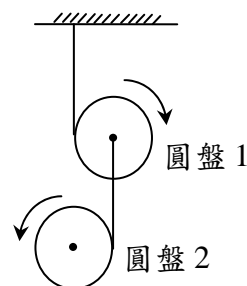


圖 2

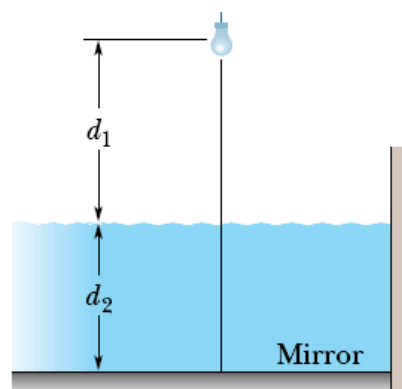
(3) 若有三個這樣的圓盤串聯在一起，當三個圓盤同時放開，試分別求出三個圓盤運動的加速度。(5 分)

(4) 如果串聯在一起的圓盤數量十分龐大，當所有圓盤同時放開，試求出圓盤 1（最上方的圓盤）運動時的加速度為多少。(10 分)

【第五題】

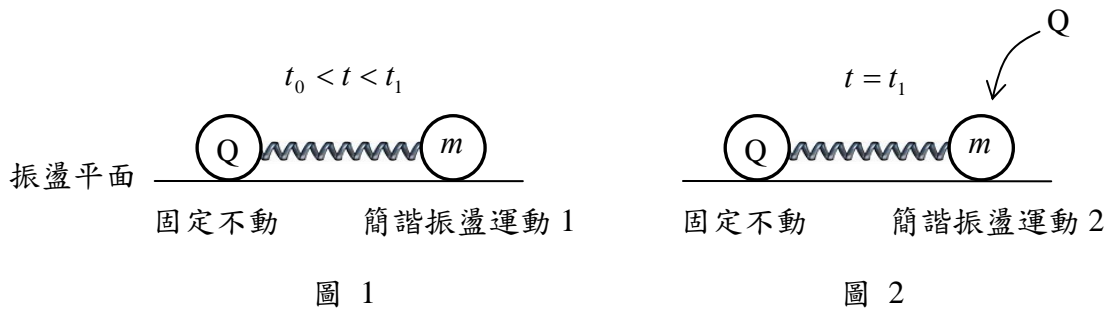
一個小燈泡懸吊於水深為 $d_2 = 200$ 公分的水池上方，距離水面高度為 $d_1 = 250$ 公分。若水池底部為一面大鏡子，試問燈泡的影像位於鏡面下多遠處？(20 分)

（利用小角度近似法： $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ ；水的折射率 $n_w = \frac{4}{3}$ ）



【第六題】

在水平面上有一個質量為 m 的質點連結在絕緣體彈簧一端，彈簧另一端連結在帶電量為 Q 的固定不動質點上，彈簧的長度為 L ，彈性係數為 K 。今將質點 m 在 $t = t_0$ 時些微移動並釋放，使其作簡諧振盪（如圖 1），並假設振盪平面與質點間無摩擦力。如果振盪過程中在 $t = t_1$ 時，將電量同為 Q 的電荷感應到質量為 m 的質點上（如圖 2），假設兩帶電質點間的電位能比最大彈簧位能小很多，庫倫常數為 R ，請問 $t = t_1$ 瞬間的振盪頻率與原先 $t_0 < t < t_1$ 時的振盪頻率之比值為多少。（20 分）



【第七題】

已知水波的波速 v 可以寫成： $v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right) \times \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$ ，其中 g 是重力加速度， λ 是波長， ρ 是密度， γ 是表面張力， h 為水的深度，且 $\tanh x$ 函數的數值如圖 1 和圖 2 所示。利用此兩圖數值的結果，回答下列問題：

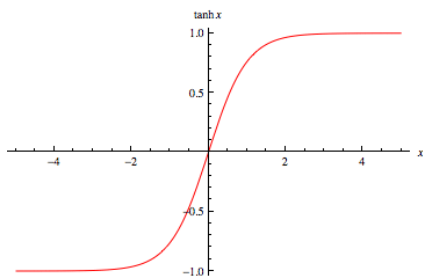


圖 1： $-5 < x < 5$ 範圍內 $\tanh x$ 函數的數值。

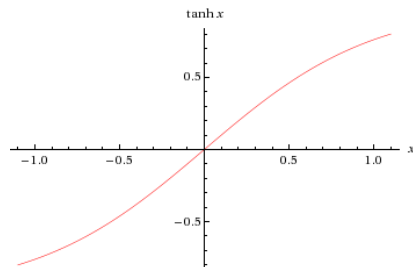


圖 2： $-1 < x < 1$ 範圍內 $\tanh x$ 函數的數值。

- (1) 很深的大湖表面水波，其波長較水的深度小很多，即 $h \gg \lambda$ 。當表面張力的效應可忽略，試求此類型的表面水波之波速為何？其群速度(group velocity)是波速的多少倍？(7分)
- (2) 在湖面產生漣漪時，表面張力的效應強。若水的深度較波長大很多，即 $h \gg \lambda$ ，且重力的效應可以忽略，試求此類型的水波波速為何？其群速度(group velocity)是波速的多少倍？(7分)
- (3) 當海嘯產生時，波長較海水的深度大很多，即 $h \ll \lambda$ ，此時表面張力的效應可以忽略。試求此類型的水波波速為何？其群速度(group velocity)是波速的多少倍？(6分)

註：一般波速可以表示成： $v = \frac{\omega}{k}$ ，其中 ω 為角頻率， k 為波數，而群速度 v_g (group velocity) 的定義為： $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ 。