教育部九十九學年度高級中學數理及資訊學科競賽物理科決賽
實驗試題

編號：

一、 題目：

給定一凸凹透鏡，請應用幾何光學的原理，分別量測此透鏡凸面及凹面之曲率半徑。

二、 實驗器材：

器材名稱	規格	數量
透鏡	玻璃製凸凹透鏡	一個
雷射筆	筆型雷射光源，附電池	一支
直尺	45cm，最小刻度單位 1mm	一支
小刀	一般用	一支
大頭針	一般用	一盒
竹籤	牙籤、長竹籤	各十二支
剪刀	一般用	一支
膠帶	隱形膠帶	一卷
簽字筆	一般文具用	一支
棉花 or 紗布	清潔鏡片用	一塊
厚紙板	A4 大小	一張
方格紙	A4 大小 1mm 方眼	一張
方格紙	350mmx250mm 大小 1mm 方眼	二張
保麗龍板	90cmx30cmx4.5cm	一塊

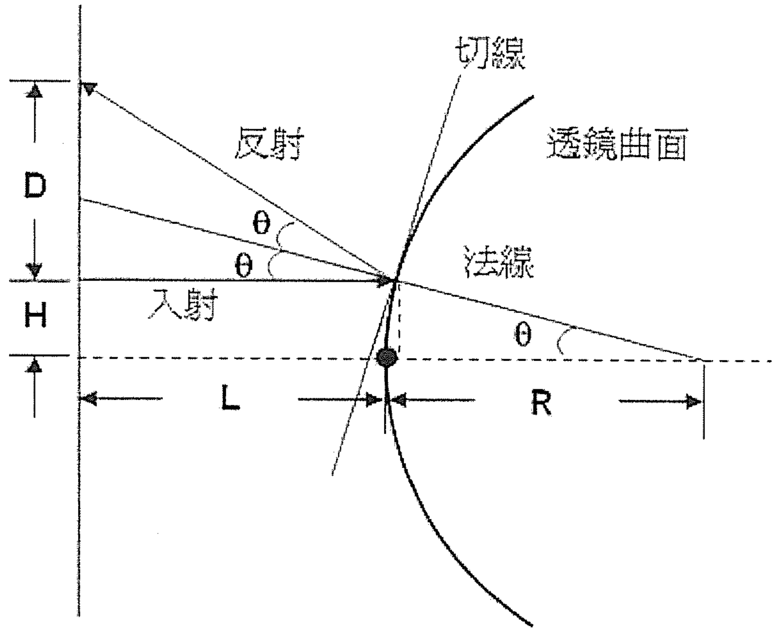
三、 說明：

(a) 請先核對試題及答案卷上之編號與您的編號是否相同，若不同請立即報告。
(b) 請先清點器材如有短缺請立即告知；可以使用非可程式工程用計算機。
(c) 實驗時，整理盒可以放在地上以騰出桌上空間；操作測量用過的方格紙必須在交卷時一併交出，方格紙可隨時要求補充，。
(d) 實驗報告請書寫於答案卷上(第 2～4 頁)，內容必須包含實驗設計原理、實驗步驟、數據記錄、分析、結果討論。
(e) 實驗完畢後，請將所有器材還原並將桌面收拾乾淨。

教育部九十九學年度高級中學數理及資訊學科競賽物理科決賽

實驗試題參考解

[實驗設計原理]



利用反射定律，光碰到透鏡面入射角等於反射角；如圖距主軸 D 之平行主軸光線射向透鏡，光線遇透鏡面後反射結果如圖所示；欲求透鏡面之曲率半徑 R，可利用

$$\tan 2\theta \approx \frac{D}{L}$$

$$\theta \approx \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{D}{L} \cdots\cdots \text{式}(1)$$

找出 $\tan\theta$ 與 R 的關係，將式(1)代入，即可求得曲率半徑 R

$$\tan\theta \approx \frac{H}{R}$$

$$R \approx \frac{H}{\tan\theta}$$

[實驗步驟]

1. 先凸凹透鏡置於方格紙上，從對稱位置找出鏡心標示出來。
2. 於保麗龍板上配合鏡片大小做出可使鏡片豎立鏡心略高於板面的插槽，將透鏡垂直豎立於板面上。
3. 方格紙中某一軸線上割出鏡片大小之割痕，讓透鏡能從割痕中探出紙面且鏡心略高出紙面，取一軸線與鏡片主軸相同之位置，將方格紙固定在保麗龍上。
4. 將雷射光距主軸 H 平行主軸射向透鏡凸面，利用竹籤找出反射光之路徑位置，

由距透鏡 L 處找出反射光位置，測出 D 值。

5. 利用測得之 D、L 計算出反射角之 $\tan\theta$ 。
6. 改變不同之 H 重覆步驟 4～5。
7. 找出 $\tan\theta$ 與 H 之線性關係式 $H=a+b\cdot\tan\theta$，由此關係式之 b 值即為題意欲求之凸面的曲率半徑 R_1。
8. 重覆步驟 4～7 但改將雷射光射向透徑凹面，就可求得凹面之曲率半徑 R_2。

[數據記錄]

1. 凸面的曲率半徑 R_1

L=14.12cm

H(cm)	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
D(cm)	0.59	0.82	1.02	1.40	2.00

2. 凹面之曲率半徑 R_2

L=15.12cm

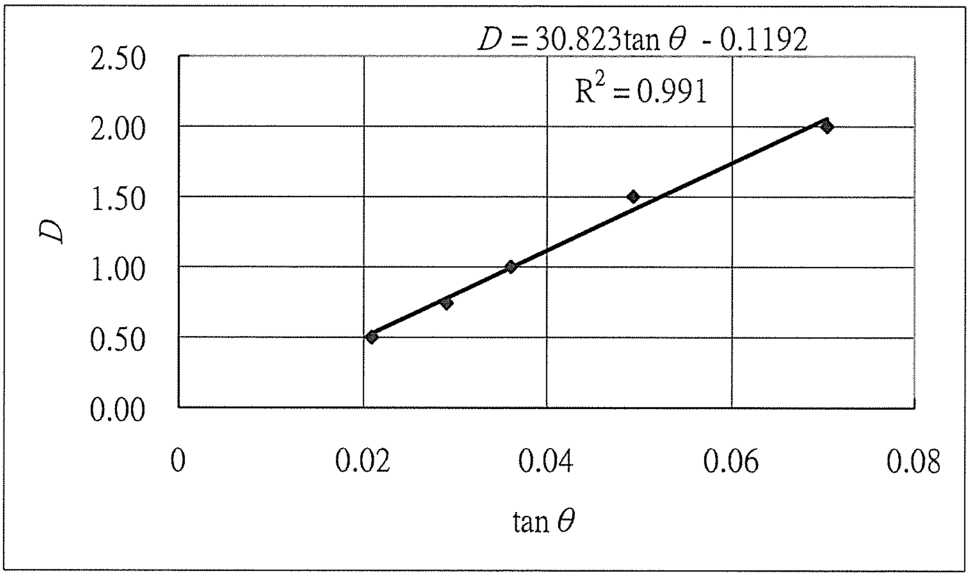
H(cm)	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
D(cm)	0.80	1.34	2.40	4.45	6.15

[分析]

1. 凸面的曲率半徑 R_1

L=14.12cm

$\tan\theta$	0.0209	0.0290	0.0361	0.0495	0.0705
D(cm)	0.59	0.82	1.02	1.40	2.00

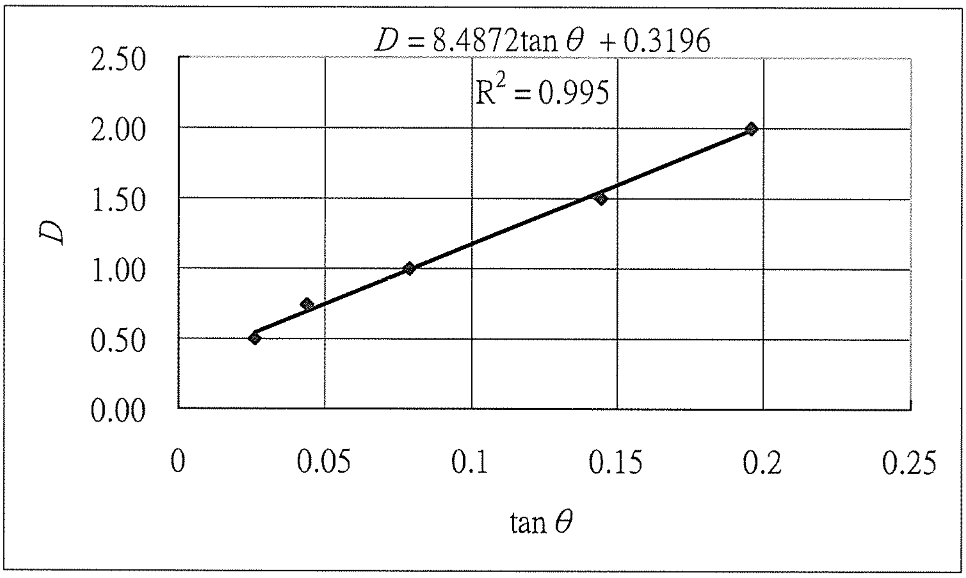


得凸面曲率半徑爲 30.82 cm

(註：由球徑計測得凸面曲率半徑爲 30.56 cm)

2. 凹面之曲率半徑 R_2

$\tan\theta$	0.0264	0.0442	0.0789	0.1441	0.1956
D(cm)	0.59	0.82	1.02	1.40	2.00



得凹面曲率半徑爲 8.49 cm

(註：由球徑計測得凹面曲率半徑爲 9.98 cm)

3. 故實驗測得此塊透鏡凸面之曲率半徑為 30.82cm，凹面之曲率半徑為 8.49cm。

[結果討論]

1. 先將雷射光沿主軸打到透鏡上，看反射光線是否沿原路徑返回，以確定透鏡與方格紙方向是否正確安置。
2. 所有的光線都要在通過鏡心垂直鏡片的平面上進行才能減少誤差。
3. 可在牙籤或竹籤上做標記，好判定光線不會因為鏡片方向或入射線歪斜造成反射線嚴重偏移。

拾參、筆試試題與參考

教育部99學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（一）

編號：______.

說明：（1）請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
（2）本試題卷共七大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

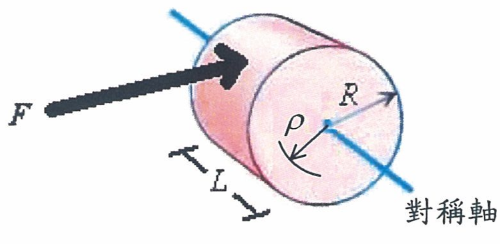
如圖示，一實心圓柱體，底圓半徑為 R，長度為 L。但其質量分布不均勻，質量密度 $\sigma(\rho)=\sigma_0\rho$（$\rho$ 為圓柱體上的點到對稱軸的距離，σ_0 為常數）。今有一力 F 水平作用於該圓柱體，請問該力要作用在何處，圓柱體才能完全滾動而不滑動？ (20 分)

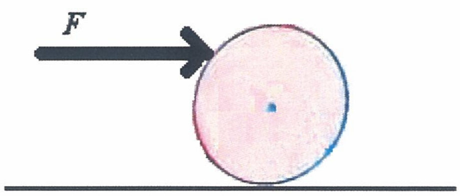
（必要時，可利用以下公式：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$ ）





【第二題】

在室溫$T=300\ K$下，將一密閉容器中之真空度降至1.0×10^{-10}毫米水銀柱，請估計容器內氣體分子間之平均距離。（理想氣體常數$R=8.31$ 焦耳/莫耳·K）（20 分）

【第三題】

如圖示，一半徑為R的圓環垂直固定於水平地面，固定點為座標原點(0, 0)，一質量為m_1之小球(體積不計)無摩擦地從圓環最高點開始沿圓環滑下，試求：

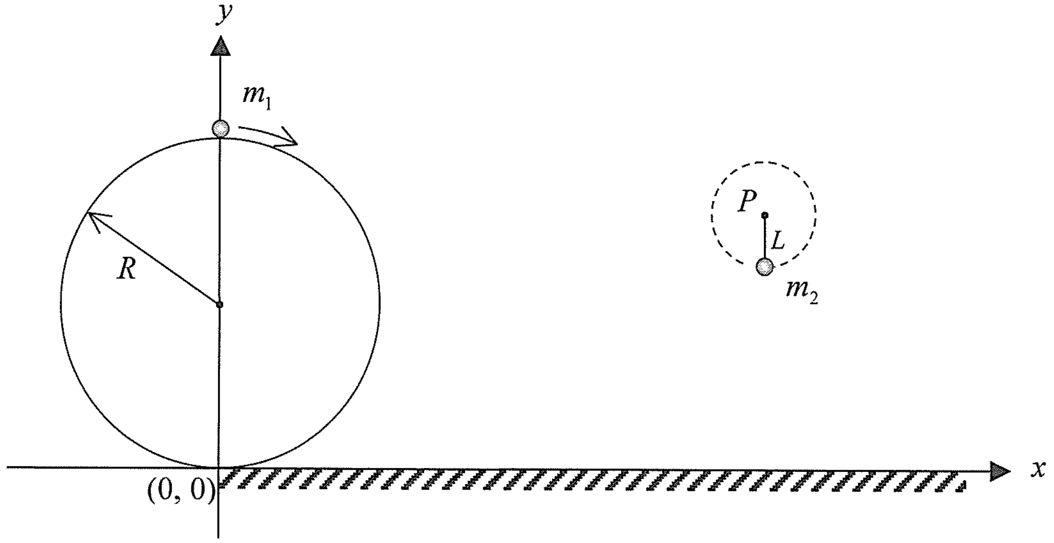
(1) 小球離開圓環之瞬間，其速率為何？(4 分)

(2) 若小球墜地時與水平地面發生彈性碰撞(小球與地面接觸時間極短不計)，反彈後到達的最高點之座標為何？(4 分)

(3) 若m_1小球到達最高點時恰與另一顆質量為m_2之小球(體積不計)發生彈性碰撞，且質量為m_2之小球在碰撞前已被一長度為L之細繩(質量不計)靜止懸吊著。若欲使m_2小球在碰撞後繞細繩之固定處P點在鉛直面上做圓周運動，則繩長L之最大值為何？(6 分)

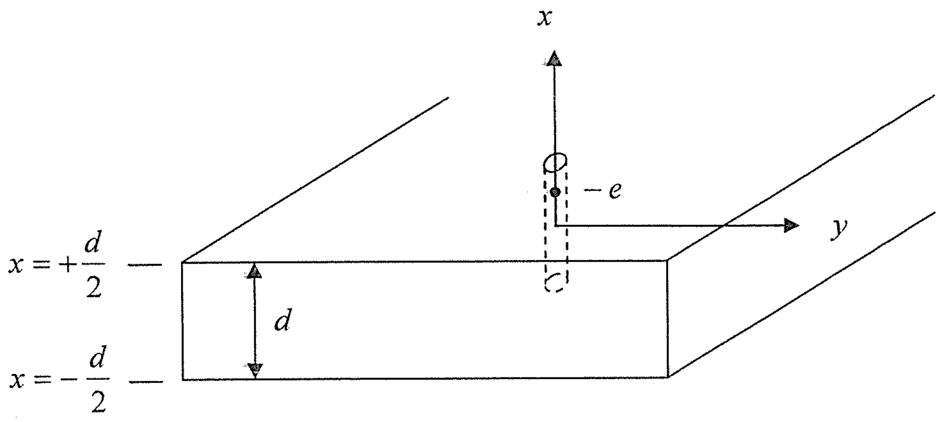
(4) 承(3)小題，在繩長 L 為最大值的情況下，請分別以三種方式求出小球繞行至最高點瞬間的速率？(6 分)

（圓環半徑$R=27$米，小球質量$m_1=m_2=1$公斤，重力加速度$g=10$ 米/秒^2，本題所牽涉之運動皆發生在$x-y$平面）



【第四題】

如圖示，一帶電體的介電常數為ε，內部電荷均勻分布，其體積電荷密度為$+\rho$，x方向上厚度為d，y與z方向上厚度為無限大。沿x軸挖一極為細長的小隧道，置入一帶電量為$(-e)$，質量為m之粒子。若在$x=x_0$處$(0<x_0<\frac{d}{2})$釋放該粒子，試求該粒子的振盪週期。(20 分)

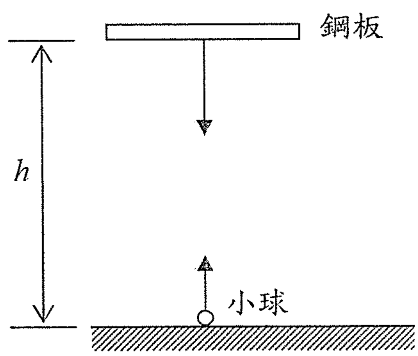


【第五題】

如圖示，質量為 m 的一小球，從高度為 h 的高處鉛直自由落下，當此球撞擊地面的同時，一片質量遠大於 m 的鋼板也從小球正上方高度為 h 的高處，板面保持水平在鉛直方向上自由落下。假設小球與地面及鋼板的撞擊是瞬間完全彈性碰撞，而且重力加速度為 g。請問

(1) 小球第二次撞擊地面時的速率是多少？(10 分)

(2) 承(1)小題，此時鋼板的高度是多少？(10 分)

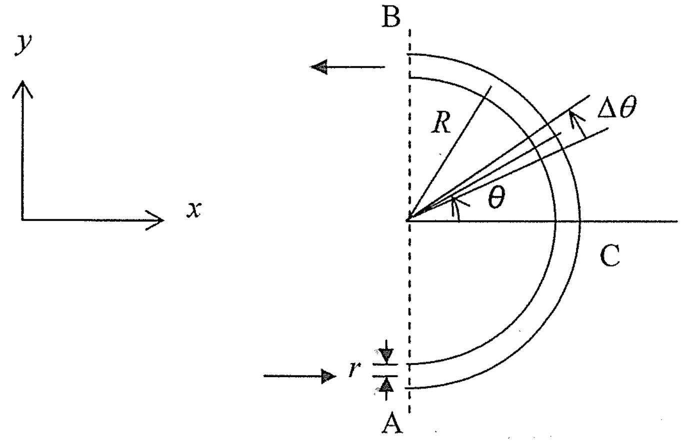


【第六題】

如圖示，有一管，其管內半徑為r，在 A 至 B 段為半圓形，曲率半徑為R，且$r << R$。將此管水平放置($x-y$平面為水平面)，密度ρ的液體在管中穩定流過，體積流量為$\Delta V/\Delta t$，且通過一橫截面的平均流動速率為常數v。已知液體在管內流動時，每流動單位長度所受的粘滯阻力為$\dfrac{f}{\pi R}$，在彎管出口處的平均液體壓力為P_B。

(1) 在彎管的θ角附近取很小的$\Delta\theta$段，試作圖表示並求出此$\Delta\theta$段液體所受的各種力的大小。(15 分)

(2) 試作圖表示並求出整段彎管內液體所受的各種力的大小。(10 分)



【第七題】

考慮一橡皮氣球自海平面緩慢升空。假設大氣壓力P_a隨海拔高度 h 的變化為$P_a = 1-0.11h$，且大氣溫度T_a隨海拔高度的變化為$T_a = 290-6.5h$；式中P_a的單位為大氣壓(atm)，T_a的單位為 K，而 h 的單位為公里。氣球自始至終皆為正圓球形，其橡皮的表面張力所造成的球內外壓力差為$P_h = 0.03(R^{-1}-R^{-7})(1+0.1R^2)$ (單位為大氣壓)，其中 $R=\dfrac{r}{5\ cm}\geq 1$ ，而r為球的半徑。初始時，在海平面上將氣球打入氫氣至半徑$r=15$公分後釋放，釋放時氣球的內、外溫度相同，之後氣球便因浮力緩緩上升。橡皮氣球未充氣時的淨質量為 15 公克。假設氣球表面為絕熱，整個上升過程中氣球內的氣體經歷了可逆絕熱膨脹 (即球內氣體滿足關係式$PV^{\gamma}=$常數，其中 P 為壓力，V 為體積，

$\gamma=\frac{7}{5}$)，而且大氣的對流可忽略。(1大氣壓 $=101325$ 牛頓/米^2)

(1) 假設氣球的表面張力超過75 牛頓/米 時便會破掉，求氣球破掉前的瞬間球內、外的溫差？(10%)

(2) 續(1)題，氣球在上升的整個過程中，球內氣體在氣球破掉前其內能的總變化量為多少焦耳（J）？(5%)

(3) 假設氣球始終不會破，求氣球所能到達的最大海拔高度？(10%)

教育部99學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（一）參考解

【第一題參考解】

圓柱體的轉動慣量 I 為 $\sum\sum\sum(\Delta\rho\cdot\rho\Delta\theta\cdot\Delta z)\cdot\sigma_0\rho\cdot\rho^2$

$$\Rightarrow I=\sigma_0\sum_k\sum_j\sum_i\left(\frac{Ri}{n}\right)^4\cdot\frac{R}{n}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\left(\frac{L}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2\pi\sigma_0R^5L}{5}$$

圓柱體的質量 M 為 $\sum\sum\sum\Delta\rho\cdot\rho\Delta\theta\cdot\Delta z\cdot\sigma_0\rho$

$$\Rightarrow M=\sigma_0\sum_k\sum_j\sum_i\left(\frac{Ri}{n}\right)^2\cdot\frac{R}{n}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\left(\frac{L}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2\pi\sigma_0R^3L}{3}$$

$$\therefore I=\frac{3}{5}MR^2$$

當撞擊力之力臂為 H 時，圓柱體完全滾動而不滑動，則

$$F=Ma \qquad (1)$$

$$\tau=I\alpha\Rightarrow FH=\frac{3}{5}MR^2\alpha \qquad (2)$$

$$a=R\alpha \qquad (3)$$

式(2)除以式(1)後將式(3)代入，得

$$H=\frac{3}{5}R^2\cdot\frac{\alpha}{a}=\frac{3}{5}R$$

【第二題參考解】

假設容器內氣體為理想氣體，則 1.0 mol 氣體之體積為

$$V=\frac{nRT}{P}$$

$$=\frac{(1.0mol)\times(8.31J/mol\cdot K)\times(300K)}{(1.0\times10^{-10}mmHg/760mmHg)\times(1.01\times10^{5}Pa/atm)}$$

$$=1.88\times10^{11}\ m^{3}$$

每一氣體分子所佔體積

$$v=\frac{V}{N}=\frac{V}{nN_A}$$

$$=\frac{1.88\times10^{11}m^{3}}{(1.0mol)\times(6.02\times10^{23}molecules/mol)}$$

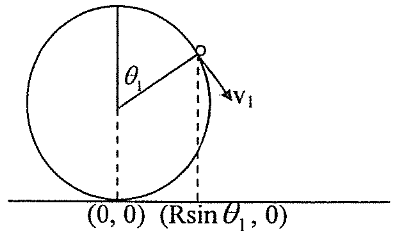
$$=3.12\times10^{-13}\ m^{3}$$

因此，氣體分子之平均距離為

$$d=\sqrt[3]{v}=6.78\times10^{-5}\ \mathrm{m}$$

【第三題參考解】

(1) 如圖所示



小球所受之向心力 $F_c = m_1 g\cos\theta - N = \dfrac{m_1 v^2}{R}$

設離開處之角度為 θ_1，離開時小球瞬間速率為 v_1

離開瞬間 $N=0$，即 $F_c = m_1 g\cos\theta_1 = \dfrac{m_1 v_1^2}{R}$ (1)

從最高點至離開處，小球的位能轉成動能，

即 $m_1 gR(1-\cos\theta_1) = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2$ (2)

解(1)(2)，得 $m_1 gR(1-\cos\theta_1) = \dfrac{1}{2}m_1 gR\cos\theta_1$

即 $\cos\theta_1 = \dfrac{2}{3}$，代回(1)，得 $v_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR} = 6\sqrt{5}$ (m/s)

(2) v_1 之水平分量 $v_{1x} = v_1\cos\theta_1 = 4\sqrt{5}$，垂直分量 $v_{1y} = v_1\sin\theta_1 = 10$

離開處距地面高度為 $R(1+\cos\theta_1) = 45$

設小球到達地面前瞬間之速率垂直分量為 v_{1y}'

由 $v^2 = v_0^2 + 2as$ 即 ${v_{1y}'}^2 = (v_1\sin\theta_1)^2 + 2gR(1+\cos\theta_1)$

得 $v_{1y}' = 10\sqrt{10}$，由地面反彈後離地瞬間之垂直速度大小亦為 $10\sqrt{10}$ [註]

設由離開處至落地經過之時間為 t_1，$10\sqrt{10} = 10 + 10t_1$，$t_1 = \sqrt{10} - 1$

設由地面反彈至最高點經過之時間為 t_2，$0 = 10\sqrt{10} - 10t_2$，$t_2 = \sqrt{10}$

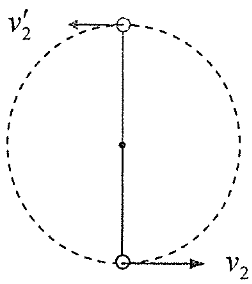
設最高點的高度為 h，由 $0^2 = (10\sqrt{10})^2 - 2gh$，得 $h = 50$

由離開處至最高點的水平距離為 $v_1\cos\theta(t_1+t_2) = 40\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

離開處之 x 座標為 $R\sin\theta_1 = 9\sqrt{5}$，所以最高點之 x 座標為 $40\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$

即小球反彈至最高點之座標為 $(40\sqrt{2} + 5\sqrt{5}, 50)$

(3) m_1 反彈至最高點時，垂直速度大小為 0，水平速度大小為 $4\sqrt{5}$



在此瞬間與靜止懸吊之 m_2 發生彈性碰撞

因 $m_1 = m_2$，所以 m_1 與靜止之 m_2 彈性碰撞後，

m_2 之速度大小 $v_2 = v_1\cos\theta_1 = 4\sqrt{5}$ [註]

設 m_2 繞行至圓周最高點時，其速度為 v_2'

繩長 L 之最大值發生在當 m_2 繞行至圓周最高點時，

僅由重力擔任向心力之情況，即此時 v_2' 為做圓周運動可允許之最小值

m_2 繞行至圓周最高點時，向心力 $F_c = m_2 g = \dfrac{m_2 {v_2'}^2}{L}$ (3)

考慮動位能之轉換，$\frac{1}{2}m_2v_2^2 - m_2g(2L) = \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$　　(4)

解(3)(4)，得 L=1.6 (m)

(4) (a) 將 L=1.6 (m) 代回(3)，得 $v_2' = 4$ (m/s)

(b) 將 L=1.6 (m) 代回(4)，得 $v_2' = 4$ (m/s)

(c) 因 $m_1 = m_2$，所以 m_1 與靜止之 m_2 彈性碰撞後將動能完全轉移[註]，

所以整個過程(從圓環滑落…圓周運動)可視為同一小球所經歷。

小球在繞行至圓周運動最高點時，距離地面為 $50 + 1.6 \times 2 = 53.2$ (m)

小球最初在圓環最高點時距地為 $2R = 54$ (m)

考慮動位能之轉換，$mg(54 - 53.2) = \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$，可得 $v_2' = 4$ (m/s)

[註] 一維彈性碰撞，考慮動量與動能守恆，

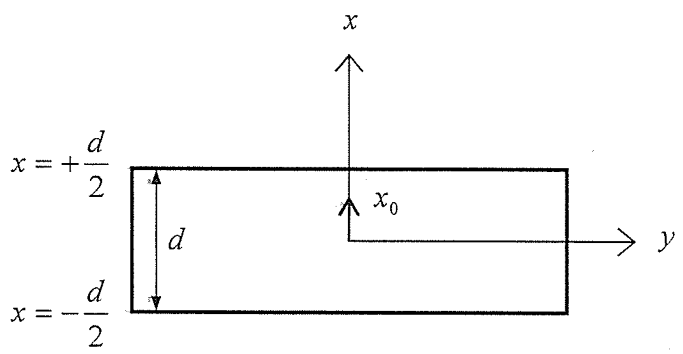
可得 $v_a' = (\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b})v_a + (\frac{2m_b}{m_a + m_b})v_b$　　$v_b' = (\frac{2m_a}{m_a + m_b})v_a + (\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b})v_b$

當 m_b 碰撞前為靜止，即 $v_b = 0$ 時

若 $m_b >> m_a$，則 $v_a' = -v_a$，$v_b' = 0$

若 $m_b = m_a$，則 $v_a' = 0$，$v_b' = v_a$

【第四題參考解】



電量為 $-e$ 的粒子於 x 軸方向上距原點 x 處（$0<x<x_0$），

根據高斯定律，通過面積 A 之電通量：$\Phi_E = EA = \dfrac{Q}{\varepsilon}$ ，

令所包圍之高斯面為一個立方體，範圍在 $-x \le x' \le x$ 、$-\dfrac{l_y}{2} \le y' \le \dfrac{l_y}{2}$ 與

$-\dfrac{l_z}{2} \le z' \le \dfrac{l_z}{2}$ ，則 $A = 2\, l_y l_z$ ， $Q = \rho V = 2\, \rho l_y l_z x$ ，

在 x 處之電場強度 $E = \dfrac{\rho x}{\varepsilon}$

電力為 $F = -eE = -\dfrac{e\rho x}{\varepsilon} = ma$

粒子的加速度 $a = -\dfrac{e\rho}{m\varepsilon} x$

由於粒子進行簡諧運動，則 $a = -\omega^2 x = -(2\pi\nu)x$

粒子的振盪頻率 $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{e\rho}{m\varepsilon}}$ ，

粒子的振盪週期 $T = \dfrac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\varepsilon}{e\rho}}$

【第五題參考解】

小球第一次撞擊地面時速度為v_1，則

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$$

所以$v_1 = \sqrt{2gh}\downarrow$。第一次撞擊後$v_1 = \sqrt{2gh}\uparrow$，此時鋼板同時落下速度為$v_2=0$，則小球與鋼板撞擊時間$t_1$滿足

$$\begin{aligned} h &= v_1t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 + v_2t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 \\ &= v_1t_1 \end{aligned}$$

所以$t_1 = \sqrt{\frac{h}{2g}}$，此時小球的速度為

$$v'_1 = \sqrt{2gh} - gt_1 = \sqrt{\frac{gh}{2}}\uparrow，$$

高度為

$$H = v_1t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{3}{4}h \;；$$

同時鋼板的速度為

$$v'_2 = gt_1 = \sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow，$$

因此相對於鋼板而言，小球的速度是$\sqrt{2gh}\uparrow$。因為鋼板質量遠大於m，小球與鋼板的撞擊等同於與地面的撞擊，所以撞完後小球相對於鋼板的速度是$\sqrt{2gh}\downarrow$，然而鋼板本身的速度為$\sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow$，所以小球相對於地面的速度是

$$v''_1 = \sqrt{2gh}\downarrow + \sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow = 3\sqrt{\frac{gh}{2}}\downarrow。$$

因此小球第二次撞擊地面時間為t_2滿足

$$\frac{3}{4}h = v''_1 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2，$$

所以$t_2 = \left(\sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{h}{g}}$，小球第二次撞擊地面時速率是

$$v''_1 + gt_2 = \sqrt{6gh}。$$

鋼板因為質量遠大於小球，與小球撞擊後所損失的速度可忽略不計，因此以全程都是自由落下來計算。落下總時間為$t_1 + t_2 = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{h}{g}}$，所以鋼板高度為

$$h - \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)^2 = \left(2\sqrt{3} - 3\right)h。$$

【第六題參考解】

液體在半圓區流過如圖 1

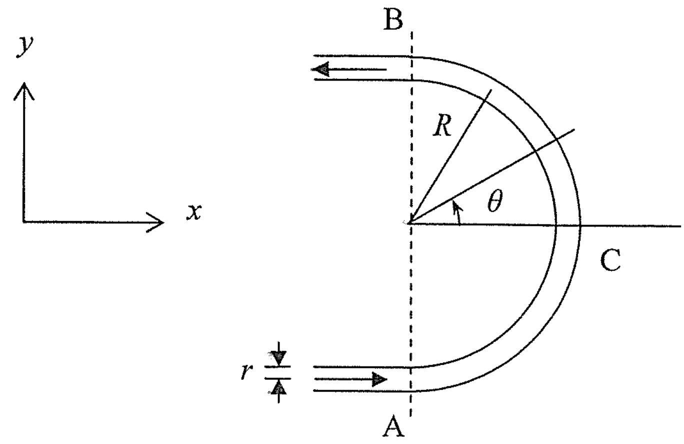


圖 1

由圖 2，圓弧上取一段長Δs，液體質量Δm，受向心力$\dfrac{\Delta m v^2}{R}$

由圖 3，許多微小的力向量合成一圓弧，大小為總量的$\dfrac{2}{\pi}$倍

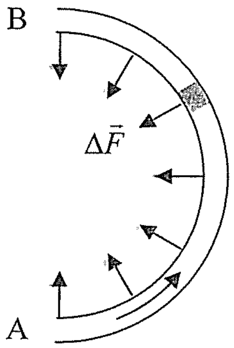


圖 2

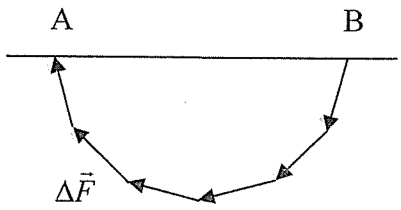


圖 3

向心力合向量在 $-x$ 方向，大小為

$$\frac{2}{\pi}\Delta m\frac{v^2}{R}=\frac{2}{\pi}\frac{v^2}{R}\rho\pi\ r^2\pi R=2\rho\pi\ r^2v^2 \qquad (1)$$

在Δt時間 A 處的$v\Delta m$動量變成 B 處的$-v\Delta m$動量

$$\text{液體受力} = 2v\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{2v\rho\pi r^2 v\Delta t}{\Delta \mathrm{t}}=2\rho\pi\ r^2v^2 \qquad (2)$$

同(1)

由圖 4，液體沿彎管受粘滯力f，合力為向下的阻力$\dfrac{2f}{\pi}$

液體在 B 處壓力P_B，在 A 處壓力$P_A=P_B+\Delta P=P_B+\dfrac{f}{\pi r^2}$

可視為 A 處壓力為$(P_B+\frac{\Delta P}{2})+\frac{\Delta P}{2}$，B 處壓力為$(P_B+\frac{\Delta P}{2})-\frac{\Delta P}{2}$

其中$P_B+\frac{\Delta P}{2}$在彎管內各處為均勻壓力不產生力。$\frac{\Delta P}{2}$在 A 處造成對液體的推力$\frac{f}{2}$。因粘滯力的消耗沿圓弧推力漸減，在 C 處不受推力，過 C 處吸力漸增。$-\frac{\Delta P}{2}$在 B 處造成對液體的吸力$\frac{f}{2}$，液體沿圓弧受力f（見圖 5）。

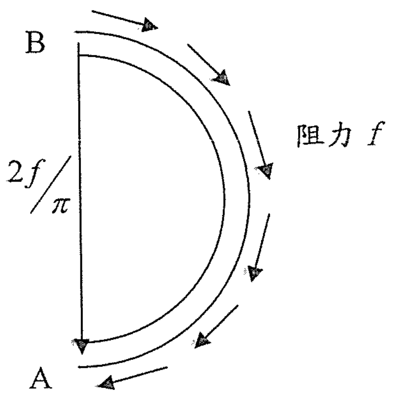


圖 4

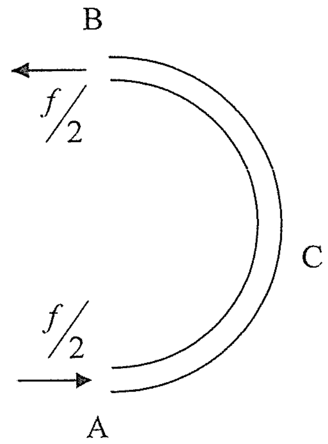


圖 5

由圖 6，AC 段液體在θ角取$\Delta\theta$範圍，兩邊各受推力$f'=\frac{f}{\pi}(\theta+\frac{\Delta\theta}{2})$和$f'=\frac{f}{\pi}(\theta-\frac{\Delta\theta}{2})$。此範圍在圓弧切線方向受推力$\frac{f\Delta\theta}{\pi}$，和粘滯阻力$\frac{f\Delta\theta}{\pi}$相抵消。二邊推力與此段中點的切線成夾角皆為$\frac{\Delta\theta}{2}$，產生$\hat{\mathrm{R}}$方向的作用力$2f'\sin(\frac{\Delta\theta}{2})\cong\frac{f\theta}{\pi}\Delta\theta$，此力由彎管的抗力抵消。

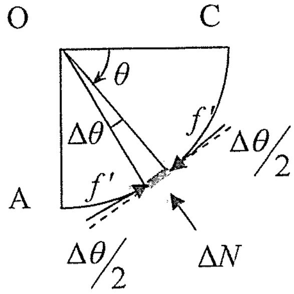


圖 6

AC 段抗力的y分量為$\frac{f}{\pi}\sum\theta\sin\theta\ \Delta\theta$。若取

$\sin\theta\cong1$，則$0<\theta<\frac{\pi}{2}$區間的$\sum$值接近$\frac{1}{2}\times1\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$

而$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$區間多算的$\sum$值接近$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi^2}{36}$

故$0<\theta<\frac{\pi}{2}$區間的$\sum$值接近$\frac{7\pi^2}{8\times9}\cong0.96$。

x分量則為$-\frac{f}{\pi}\sum\theta\cos\theta\ \Delta\theta$。

由圖 7，BC 段液體在θ角取$\Delta\theta$範圍，兩邊各受拉力$f'=\frac{f\theta}{\pi}$。此二力與此

段中點的切線夾角皆為$\dfrac{\Delta\theta}{2}$。產生$-\hat{\mathrm{R}}$方向的力$2f'\sin(\dfrac{\Delta\theta}{2})\cong\dfrac{f\theta}{\pi}\Delta\theta$。BC 段抗力的$y$分量為$\dfrac{f}{\pi}\sum\ \theta\sin\theta\ \Delta\theta$，$x$分量則為$\dfrac{f}{\pi}\sum\ \theta\cos\theta\ \Delta\theta$。

此二段抗力的y分量的和應為$\dfrac{2f}{\pi}$，x分量則互相抵消。

彎管內整個液體受外力如圖 8。

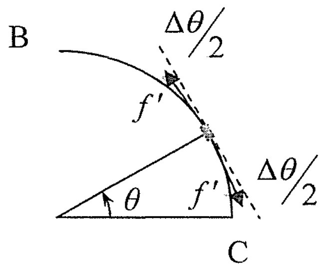


圖 7

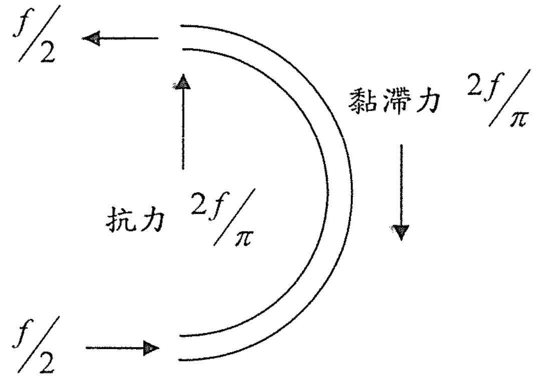


圖 8

附微積分解法

見圖 6，由 C 處出發，在θ處取$\Delta\theta$。圓弧運動的推力$f'=\dfrac{f}{2}\cdot\dfrac{\theta}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{f\theta}{\pi}$

抗力$\Delta N=2f'\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\cong f'\Delta\theta=\dfrac{f\theta}{\pi}\Delta\theta$

AC 段抗力的y分量為

$$N_{y,\mathrm{AC}}=\int_0^{\pi/2}\frac{f\theta}{\pi}\sin\ \theta\ \mathrm{d}\theta=-\frac{f}{\pi}\int_0^{\pi/2}\theta\ \mathrm{d}\cos\ \theta=\frac{-f}{\pi}(\theta\ \cos\theta\ \Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta)$$

$$=-\frac{f}{\pi}(0-\sin\ \theta\Big|_0^{\pi/2})=\frac{f}{\pi}$$

同理 CB 段抗力的分量也是$\dfrac{f}{\pi}$，抗力的總共y分量為$\dfrac{2f}{\pi}$。

【第七題參考解】

(1) 初始時球半徑 $r_0=15\text{ cm}\Rightarrow R_0=\dfrac{r_0}{5\text{ cm}}=3$，故在海平面時的氣球內初始壓力為

$$P_{i0}=\left[1+0.03\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^7}\right)\left(1+0.1\times 3^2\right)\right]\approx 1.01897\ (\text{atm})$$

在高度 h 公里時，球半徑為 r，升空過程為絕熱($\gamma=7/5$)，得球內壓為

$$P_i=P_{i0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]^{7/5}\approx 1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}\ (\text{atm})$$

此時球外大氣壓力為

$$P_a=P_i-P_b=P_i-0.03\left(R^{-1}-R^{-7}\right)\left(1+0.1\times R^2\right)$$

故此時高度為

$$h=\frac{1-P_a}{0.11}=\frac{1-1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}+0.03\left(R^{-1}-R^{-7}\right)\left(1+0.1\times R^2\right)}{0.11}$$

由於靜力平衡： $4\pi rt=\pi r^2P_b$

故可得氣球所受表面張力為 $t=\dfrac{r}{4}P_b$

破掉時的極限為

$$\frac{r}{4\times 100}0.03\left(R^{-1}-R^{-7}\right)\left(1+0.1\times R^2\right)\times 101325=75\text{ N/m}$$

$$\Rightarrow r\left(\frac{1}{R}+0.1\times R\right)\approx 9.86923\Rightarrow 5+0.02r^2\approx 9.86923\Rightarrow r\approx 15.6\ (\text{cm})$$

此時高度為

$$h=\frac{1-1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}+0.03\left(R^{-1}-R^{-7}\right)\left(1+0.1\times R^2\right)}{0.11}\approx 1.4\ (\text{km})$$

球內溫度為 $T_i=T_{i0}\left(\dfrac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}=T_{i0}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{6/5}=290\left(\dfrac{15}{15.6}\right)^{6/5}\approx 276.7(K)$

球外溫度為 $T_a=290-6.5\,h\approx 280.9\ (\text{K})$

故球內外溫差為 $T_a-T_i\approx 4.2(K)$

(2) 因為是可逆絕熱膨脹，所以內能的總變化量＝－球內氣體對外所作的功

$$=-\int_{V_0}^{V}PdV=-\int_{V_0}^{V}P_{i0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{7/5}dV=\frac{5}{2}P_{i0}V_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/5}\Bigg|_{V_0}^{V}=\frac{5}{2}\left(P_iV-P_{i0}V_0\right)$$

$$=\frac{5}{2}nR\left(T_i-T_{i0}\right)=\frac{5}{2}\frac{P_{i0}V_0}{T_{i0}}(276.7-290)$$

$$=\frac{5}{2}\frac{1.01897\times\frac{4\pi}{3}15^3}{290}(276.7-290)\times\frac{101325}{10^6}(\text{J})$$

$$\approx 167(\text{J})$$

(3)球內密度為

$$\rho_i=\frac{P_iM_H}{RT_i}=1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}\frac{2\ \text{g}/\ell}{0.082\times 290\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6/5}}\approx 8.56997\times 10^{-5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3}\ \text{g/cm}^3$$

大氣密度為 $$\rho_a=\frac{P_aM_a}{RT_a}=\frac{\left[P_i-0.03\left(R^{-1}-R^{-7}\right)\left(1+0.1\times R^2\right)\right]28.8}{0.082(290-6.5h)\times 1000}\text{g/cm}^3$$

當到達最大高度時，浮力平衡重力：

$$(\rho_a-\rho_i)\frac{4\pi r^3}{3}=m_b$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{(1-0.11h)28.8}{82(290-6.5h)}-8.57\times 10^{-5}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3}\text{g/cm}^3\right\}\frac{4\pi r^3}{3}=15$$

又 $$h=\frac{1-1.01897\left(\frac{r_0}{r}\right)^{21/5}+0.03\left(\frac{5}{r}+0.1\times\frac{r}{5}\right)}{0.11}$$

代入消去r可解得 $h\approx 3.1$ (km)

教育部 99 學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（二）

編號：_______.

說明：（1）請先核對答案卷上之編號和你的編號是否一致。
（2）本試題卷共七大題，請依題號在答案卷上指定位置作答，試題卷需隨答案卷繳回。

【第一題】

如圖 1 所示，兩繩 L_1 及 L_2 繫在一起後，經定滑輪及動滑輪懸吊一質量為 M 之懸吊物。其中繩 L_1 的線密度為 μ_1，而繩 L_2 的線密度為 μ_2。兩定滑輪距牆上繫繩端點的距離分別為 d_1 與 d_2。兩繩所受的張力來自於下方動滑輪上的懸吊物（忽略動滑輪質量），懸吊物重量遠大於兩繩重量，故兩繩重量可忽略不計。請問：

(1) 若於繩 L_1 及繩 L_2 上產生繩波，兩繩上的繩波波速 v_1 與 v_2 各為何？(5%)

(2) 當繩波於定滑輪及牆上端點間形成駐波時，於繩 L_1 及繩 L_2 上可能產生的駐波頻率分別為何？(5%)

(3) 如圖 2 所示，若將懸吊物切成兩塊，質量分別為 M_1 及 M_2，分別用繩 L_1 及繩 L_2 經由定滑輪懸吊。請求出當繩 L_1 上產生的基音頻率與繩 L_2 上產生的第二泛音頻率相同時，兩塊懸吊物之質量比 M_1/M_2。(10%)

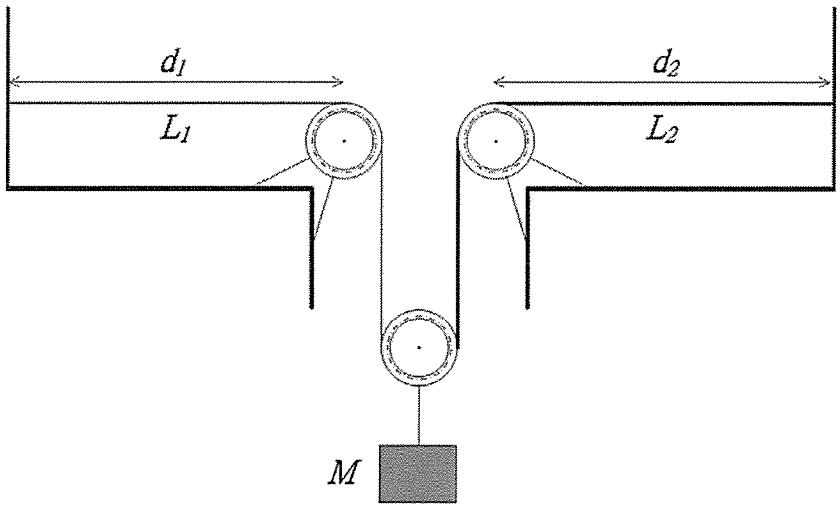


圖 1

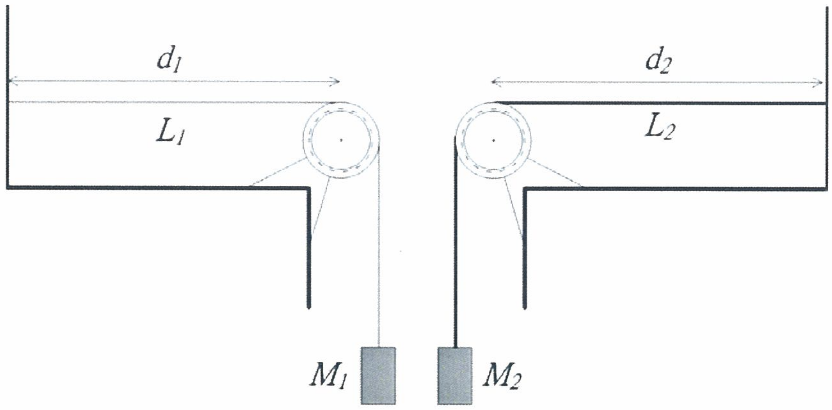


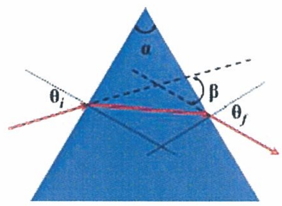
圖　2

【第二題】

有一道光從稜鏡左側入射，入射角為θ_i $(0^0 < \theta_i < 90^0)$，如圖所示。其中射出光線與原入射光線行進方向之夾角稱為偏向角β，稜鏡的頂角為α，且稜鏡折射率與空氣折射率之比值為n。請回答下列問題：

(1) 試求入射角θ_i的條件，使得光經過兩次折射後，可由右側射出（以n及α表示之）。(4分)

(2) 試將偏向角β表示為入射角θ_i及頂角α的函數。(7分)



(3) 在某一個入射角θ_i時，偏向角為最小，請推導求出此最小偏向角γ（以發生最小偏向角時之入射角θ_i及頂角α表示之）。(7分)

(4) 透過實驗量測，可以找出最小偏向角γ，由此可以反推求出n值。請推導並將n表示為γ及α的函數$n(\gamma, \alpha)$。(7分)

【第三題】

當水波以速率v在水面上傳播時，由於水極難壓縮，因此當水波通過時，水質點不僅在原處作鉛直方向的簡諧振動，它也在水平方向上作簡諧振動，而且這兩個振動的週期必須相等，才能維持一定的波動形狀。圖1所示為平面水波在不同深度的水區傳播時，水質點的運動情形（圖中h為水深，λ為水波的波長）：圖(a)為在深水區($h >> \lambda$)時，水質點做圓運動，但圓半徑則隨水深的增加而迅速

遞減；圖(b)為在中間深度的水區時，水質點做橢圓運動，其在鉛直方向的振幅，因受水底面的影響，其隨水深遞減的幅度大於其沿水平方向的振幅；圖(c)為在淺水區($h \ll \lambda$)時，水質點僅作水平方向上的直線振動，且位在同一鉛直線的水質點以同一速度運動。

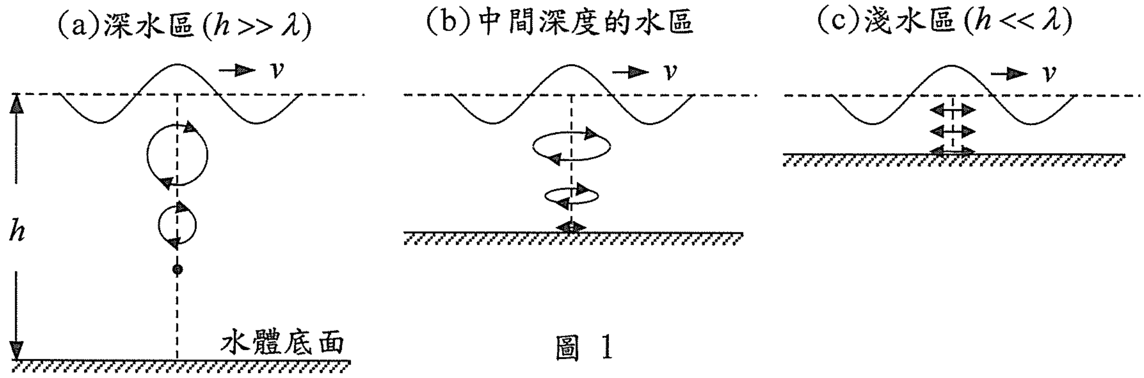


圖 1

圖 2 所示為水波在深水區傳播時，靠近水面處的水質點的連續運動情形。

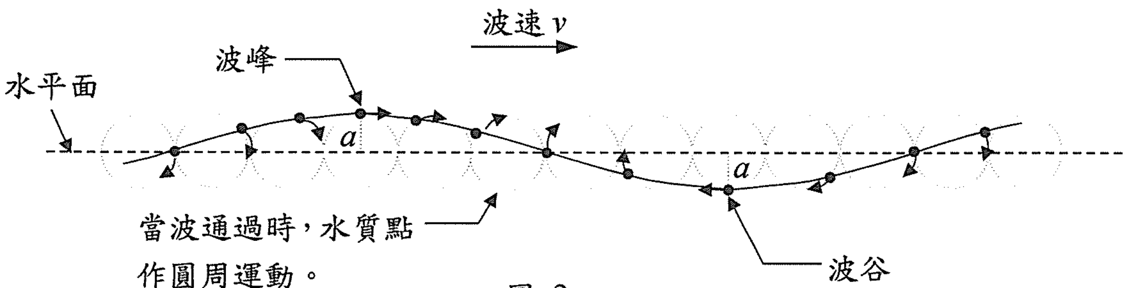


圖 2

根據上述的說明，回答下列問題：

(1) 導出水波在深水區($h \gg \lambda$)傳播時，其傳播速率 v 和波長 λ 之間的關係式。(10 分)

(2) 導出水波在淺水區($h \ll \lambda$)傳播時，其傳播速率 v 和深度 h 之間的關係式。(10 分)

【提示】：利用白努利方程式 $p+\frac{1}{2}\rho v^{2}+\rho g y=$ 常數。

【第四題】

一條輕細繩一端纏繞在一個均勻的圓盤邊緣，圓盤的半徑為 R，質量為 M，細繩的另一端固定在天花板上（如圖 1）。

（圓盤對其中心軸的轉動慣量為 $I=\frac{1}{2}MR^2$）

(1) 當放開圓盤，讓圓盤鉛直掉下，求圓盤運動的加速度。(5 分)

(2) 若有兩個這樣的圓盤串聯在一起(即纏繞在下方圓盤細繩的另一端固定在上方鄰接圓盤的中心軸，如圖 2)，當兩個圓盤同時放開，試分別求出兩個圓盤運動的加速度。(5 分)

(3) 若有三個這樣的圓盤串聯在一起，當三個圓盤同時放開，試分別求出三個圓盤運動的加速度。(5 分)

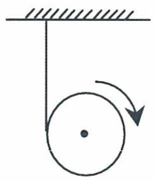


圖 1

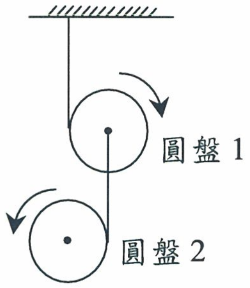
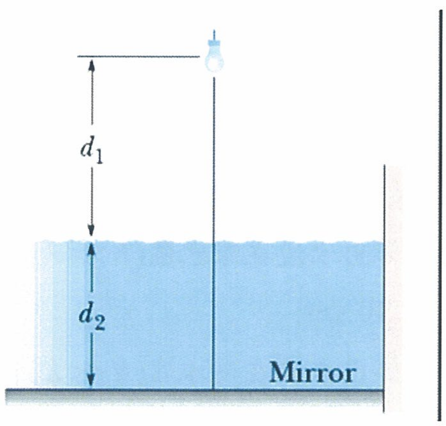


圖 2

(4) 如果串聯在一起的圓盤數量十分龐大，當所有圓盤同時放開，試求出圓盤 1（最上方的圓盤）運動時的加速度為多少。(10 分)

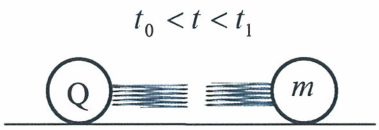
【第五題】

一個小燈泡懸吊於水深為 $d_2=200$ 公分的水池上方，距離水面高度為 $d_1=250$ 公分。若水池底部為一面大鏡子，試問燈泡的影像位於鏡面下多遠處？(20 分)
（利用小角度近似法：$\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta$；水的折射率 $n_W=\dfrac{4}{3}$）



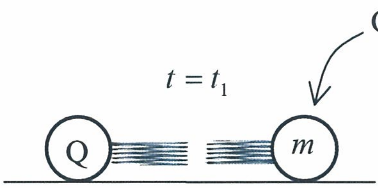
【第六題】

在水平面上有一個質量為 m 的質點連結在絕緣體彈簧一端，彈簧另一端連結在帶電量為Q的固定不動質點上，彈簧的長度為 L，彈性係數為 K。今將質點 m 在 $t=t_0$ 時些微移動並釋放，使其作簡諧振盪（如圖 1)，並假設振盪平面與質點間無摩擦力。如果振盪過程中在 $t=t_1$ 時，將電量同為 Q 的電荷感應到質量為 m 的質點上（如圖 2)，假設兩帶電質點間的電位能比最大彈簧位能小很多，庫侖常數為 R，請問 $t=t_1$ 瞬間的振盪頻率與原先 $t_0<t<t_1$ 時的振盪頻率之比值為多少。(20 分)



振盪平面　固定不動　簡諧振盪運動 1

圖 1



固定不動　簡諧振盪運動 2

圖 2

【第七題】

已知水波的波速 v 可以寫成：$v=\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)\times\tanh\left(2\pi h/\lambda\right)}$，其中 g 是重力加速度，λ 是波長，ρ 是密度，γ 是表面張力，h 為水的深度，且 $\tanh x$ 函數的數值如圖 1 和圖 2 所示。利用此兩圖數值的結果，回答下列問題：

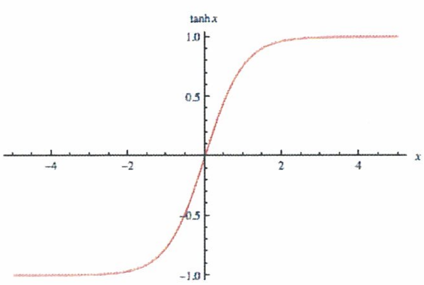


圖 1：-5<x<5 範圍內 tanh x 函數的數值。

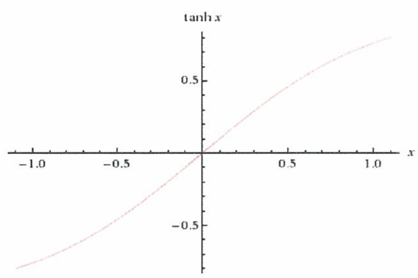


圖 2：-1<x<1 範圍內 tanh x 函數的數值。

(1) 很深的大湖表面水波，其波長較水的深度小很多，即$h >> \lambda$。當表面張力的效應可忽略，試求此類型的表面水波之波速為何？其群速度(group velocity)是波速的多少倍？(7 分)

(2) 在湖面產生漣漪時，表面張力的效應強。若水的深度較波長大很多，即$h >> \lambda$，且重力的效應可以忽略，試求此類型的水波波速為何？其群速度(group velocity)是波速的多少倍？(7 分)

(3) 當海嘯產生時，波長較海水的深度大很多，即$h << \lambda$，此時表面張力的效應可以忽略。試求此類型的水波波速為何？其群速度(group velocity)是波速的多少倍？(6 分)

註：一般波速可以表示成：$v = \dfrac{\omega}{k}$，其中ω為角頻率，k為波數，而群速度v_g (group velocity)的定義為：$v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$。

教育部99學年度高級中學數理及資訊學科能力競賽物理科決賽

筆試試題（二）參考解

【第一題參考解】

(1) 由繩波波速公式：$v=\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$

其中F為繩之張力、μ為繩之線密度

而兩繩之張力為懸掛物重之一半，即：$F_1=F_2=\dfrac{Mg}{2}$

可得兩繩上的繩波波速 v_1、v_2分別為：

$$v_1=\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}=\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_1}} \text{、} v_2=\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}=\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_2}}$$

(2) 於繩上形成駐波之條件為：兩定點之間距為繩波半波長之整數倍，即：

$$d=m\frac{\lambda}{2} \text{、} m\in N$$

利用$v=f\lambda$改寫條件為：

$$d=m\frac{v}{2f_m}$$

繩上可產生的駐波頻率為：

$$f_m=m\frac{v}{2d}$$

得繩L_1及繩L_2可能產生的駐波頻率分別為：

$$f_{1m}=m\frac{v_1}{2d_1}=\frac{m}{2d_1}\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_1}} \text{、} f_{2n}=n\frac{v_2}{2d_2}=\frac{n}{2d_2}\sqrt{\frac{Mg}{2\mu_2}}$$

(3) 繩L_1基音與繩L_2的第二泛音相同，即需滿足條件：

$$f_{11}=f_{23}$$

此時$F_1=M_1g$、$F_2=M_2g$，代入上述駐波頻率計算結果得：

$$\frac{1}{2d_1}\sqrt{\frac{M_1g}{\mu_1}}=\frac{3}{2d_2}\sqrt{\frac{M_2g}{\mu_2}}$$

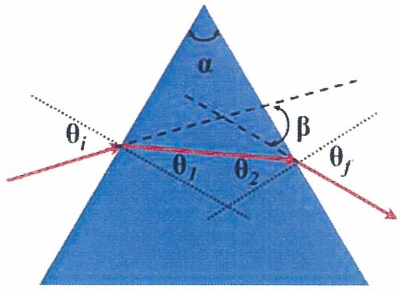
式子兩邊平方再消去相同變數得：

$$1\frac{M_1}{d_1^2\mu_1}=9\frac{M_2}{d_2^2\mu_2} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2}=9\frac{d_1^2\mu_1}{d_2^2\mu_2}$$

【第二題參考解】

分析幾何關係

$$\begin{cases}(90^0-\theta_1)+\alpha+(90^0-\theta_2)=180^0\\ \beta=(\theta_i-\theta_1)+(\theta_f-\theta_2)\end{cases}$$



$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\theta_1+\theta_2\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}$$

(1) 無法從右側出射之限制條件為：右側介面發生全反射

$$\begin{cases}n\sin\theta_2\ge 1\\ \alpha=\theta_1+\theta_2\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_2\ge\sin^{-1}\dfrac{1}{n}\\ \alpha=\theta_1+\theta_2\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1\le\alpha-\sin^{-1}\dfrac{1}{n}\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\theta_i\ge\sin^{-1}\left[n\sin\left(\alpha-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)\right]\qquad \text{且}\ \sin\left(\alpha-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$$

(2)

$$\begin{cases}n\sin\theta_2=\sin\theta_f\\ \alpha=\theta_1+\theta_2\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_1\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_f=\sin^{-1}[n\sin(\alpha-\theta_1)]\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{n}\sin\theta_i\\ \cos\theta_1=\left[1-\left(\dfrac{1}{n}\sin\theta_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\theta_f=\sin^{-1}\left\{n\sin\alpha\left[1-\left(\dfrac{1}{n}\sin\theta_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\sin\theta_i\cos\alpha\right\}\\ \beta=\theta_i+\theta_f-\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\beta=\theta_i+\sin^{-1}\left[\left(n^2-\sin^2\theta_i\right)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha-\sin\theta_i\cos\alpha\right]-\alpha$$

(3)

$$\begin{cases} n\sin\theta_2 = \sin\theta_f & (1) \\ \alpha = \theta_1 + \theta_2 & (2) \\ \sin\theta_i = n\sin\theta_1 & (3) \\ \beta = \theta_i + \theta_f - \alpha & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} a \quad \text{minimum} \quad \text{deviation}: \left(\frac{d\beta}{d\theta_i}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d\theta_f}{d\theta_i} = -1 \\ \frac{d(\text{式}2)}{d\theta_i}\ \text{式2對}\theta_i\text{微分} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta_2}{d\theta_i} = -\frac{d\theta_1}{d\theta_i} \end{cases}} \begin{cases} \frac{d(\text{式}1)}{d\theta_i}\text{式1對}\theta_i\text{微分} \Rightarrow -\cos\theta_f = n\cos\theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_i} \\ \frac{d(\text{式}3)}{d\theta_i}\text{式3對}\theta_i\text{微分} \Rightarrow \quad \cos\theta_i = n\cos\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\theta_i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2 \cos\theta_i = \cos\theta_1 \cos\theta_f$$

$$\Rightarrow (1-\sin^2\theta_2)(1-n^2\sin^2\theta_1) = (1-\sin^2\theta_1)(1-n^2\sin^2\theta_2)$$

If $n \neq 1 \Rightarrow |\sin\theta_1| = |\sin\theta_2| \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \theta_i = \theta_f$

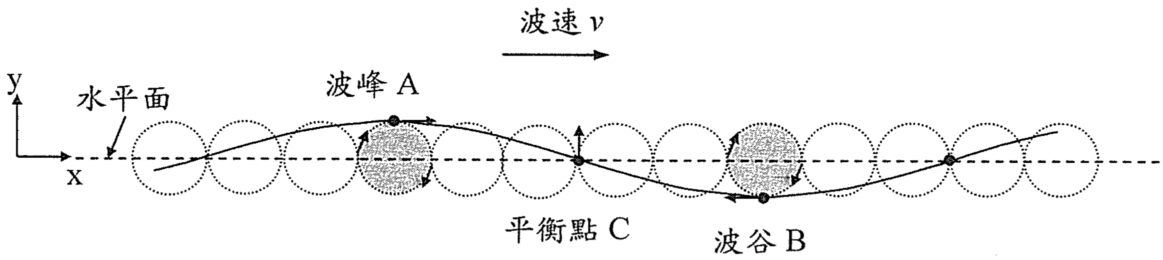
$$\Rightarrow \gamma = 2\theta_i - \alpha$$

(4)

$$\begin{cases} \gamma = 2\theta_i - \alpha \\ \sin\theta_i = n\sin\frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

【第三題參考解】

(1) 由圖 1(a)可看出水波在深水區傳播時，由於水體底面未受擾動，故水波的傳播速率應和深度 h 無關。參考下圖所示，A、B 和 C 分別為水面上波峰、波谷和平衡點的位置。從設於地面的參考坐標系來看，A 和 B 兩處的水質點在水平方向的速度分量分別為 u(向右)和 $-u$(向左)，u 為水質點作圓運動的切線速率，其在鉛直方向的速度分量為零。假設一觀察者以與波速 v 相同的速度運動，則此觀察者將可見到一靜止在水面上的波形。從觀察者的參考坐標系來看，靠近水面的水質點順著波形由右向左流動。A 和 B 兩點的速度分別為



$$v_A = u - v = -(v-u) \qquad (1)$$

$$v_B = -u - v = -(v+u) \qquad (2)$$

取水平面為重力位能的零點，利用白努利方程式可得

$$p + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g a = p + \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho g a \qquad (3)$$

式中 a 為水質點作圓運動的半徑。將(1)和(2)兩式代入(3)式，得

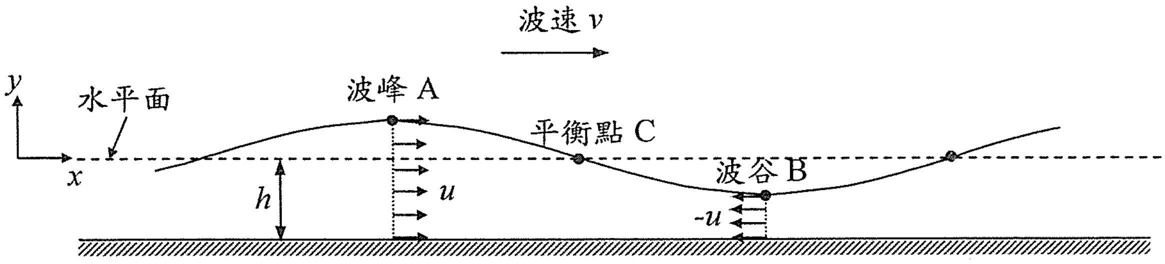
$$(v+u)^2 - (v-u)^2 = 4ga \quad \Rightarrow \quad uv = ga \qquad (4)$$

由於 u 為水質點沿切線方向上的運動速率，故 $u = a\omega$，式中 ω 為水波的角頻率，以之代入(4)式，可得

$$(a\omega)v = ga \quad \Rightarrow \quad \omega v = g \qquad (5)$$

因為 $\omega = 2\pi f = 2\pi \dfrac{v}{\lambda}$，代入上式，得 $v = \sqrt{\dfrac{\lambda g}{2\pi}}$。

(2) 參看下圖所示水波在淺水區的傳播情形，此時位在同一鉛直線上的水質點皆以同一速度運動。仿照上題的解法，設一觀察者以與波速 v 相同的速度運動，則從觀察者的參考坐標系來看，水質點順著波形由右向左流動，A 和 B 兩處的速度分別為 $v_A = -(v-u)$ 和 $v_B = -(v+u)$。取水平面為重力位能的零點，利用白努利方程式，可得



$$p+\frac{1}{2}\rho(v-u)^2+\rho gb=p+\frac{1}{2}\rho(v+u)^2-\rho gb \quad\Rightarrow\quad uv=gb \qquad (6)$$

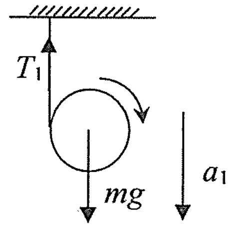
式中 b 為水波的振幅。利用流體的連續方程式，可得

$$(v-u)(h+b)=(v+u)(h-b) \quad\Rightarrow\quad vb=uh \qquad (7)$$

由(6)和(7)兩式消去 b，可得 $v=\sqrt{gh}$ 。

【第四題參考解】

(1) 由線量型牛頓第二定律



$$mg - T_1 = ma_1$$

通過圓盤軸心的轉動，應用角量型牛頓第二定律

$$T_1 R = I\alpha_1$$

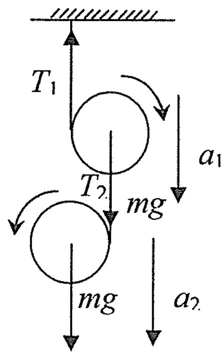
角加速度和線加速度的關係為：

$$a_1 = \alpha_1 R \qquad T_1 = \frac{1}{2}ma_1$$

由上三式可得

$$a_1 = \frac{g}{1 + I/mR^2} = \frac{2}{3}g$$

(2) 由線量型牛頓第二定律



$$mg + T_2 - T_1 = ma_1$$

$$mg - T_2 = ma_2$$

通過圓盤軸心的轉動，應用角量型牛頓第二定律

$$T_1 R = I\alpha_1 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_1$$

$$T_2 R = I\alpha_2 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_2$$

角加速度和線加速度的關係為：

$$a_1 = \alpha_1 R \qquad T_1 = \frac{1}{2}ma_1$$

$$a_2 = \alpha_2 R + a_1 \qquad T_2 = \frac{1}{2}m(a_2 - a_1)$$

由上三式可得

$$4a_1 - a_2 = 2g \qquad -a_1 + 3a_2 = 2g$$

$$a_1 = \frac{8}{11}g, \quad a_2 = \frac{10}{11}g$$

(3) 由線量型牛頓第二定律

$$mg + T_2 - T_1 = ma_1$$

$$mg + T_3 - T_2 = ma_2$$

$$mg - T_3 = ma_3$$

通過圓盤軸心的轉動，應用角量型牛頓第二定律

$$T_1R = I\alpha_1 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_1$$

$$T_2R = I\alpha_2 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_2$$

$$T_3R = I\alpha_3 = \frac{1}{2}mR^2\alpha_3$$

角加速度和線加速度的關係為：

$$a_1 = \alpha_1 R \qquad T_1 = \frac{1}{2}ma_1$$

$$a_2 = \alpha_2 R + a_1 \qquad T_2 = \frac{1}{2}m(a_2 - a_1)$$

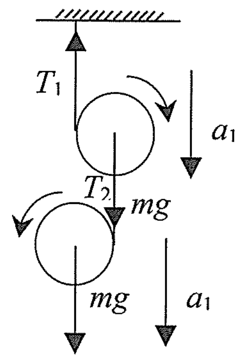
$$a_3 = \alpha_3 R + a_2 \qquad T_3 = \frac{1}{2}m(a_3 - a_2)$$

由上三式可得

$$4a_1 - a_2 = 2g \qquad -a_1 + 4a_2 - a_3 = 2g \qquad -a_2 + 3a_3 = 2g$$

$$a_1 = \frac{30}{41}g, \quad a_2 = \frac{38}{41}g, \quad a_3 = \frac{40}{41}g$$

(4) 設系統包含 N 個串聯圓盤，如圖所示，從上向下對圓盤編上號碼。第 k 號圓盤受到第 k 根線向上拉力 T_k、向下重力 mg 以及第$(k+1)$線向下拉力 T_{k+1}。列出第 k 個圓盤運動方程式



$$mg + T_{k+1} - T_k = ma_k \qquad (1)$$

式中 a_k 為環質心加速度在運動方向上加速度分量。對於任何圓盤都適用。因為第$(N+1)$號線根本就不存在，所以 $T_{N+1} = 0$（由此可見，對於 $k = 1 \sim N$，我們列出 N 個方程式，這 N 個方程中含有 $2N$ 個未知量 (a_k, T_k)。

$$T_kR = I\alpha_k = \frac{1}{2}mR^2\alpha_k$$

$$a_k = R\alpha_k + a_{k-1}, \qquad k = 1 \sim N$$

可得 $T_k = \frac{1}{2}m(a_k - a_{k-1})$

從這方程式中將表示拉力式子代入(1)方程式，最後得到

$$-a_{k-1} + 4a_k - a_{k+1} = 2g, \qquad k = 1 \sim N \qquad (2)$$

在這方程組中應該認為 $a_0 = 0$，因為這是第一個圓盤懸掛點的加速度。沒有第$(N+1)$根線，$T_{N+1} = 0$，所以 $a_{N+1} = a_N$

現在根據(2)式以展開形式列出對於三個圓盤情況下方程組

$$4a_1 - a_2 = 2g$$
$$-a_1 + 4a_2 - a_3 = 2g \qquad (3)$$
$$-a_2 + 3a_3 = 2g$$

解此方程組，得到

$$a_1 = \frac{30}{41}g,\ a_2 = \frac{38}{41}g,\ a_3 = \frac{40}{41}g$$

注意，在 N 為任意有限值的情況下，方程式(2)均可以解答。顯然當 N 增加時計算難度增大。假如 $N \to \infty$，又會怎樣呢？這就是我們要討論的問題，它對於即使 $N \to \infty$ 情況也是正確的。

假設第一個圓盤的加速度等於

$$a_1 = cg \qquad (4)$$

式中 c 是某一常數，它是我們需要確定的。現在過渡到以加速度 a_1 運動的座標系裡，在此加速座標系裡描述所有圓盤的運動。從第二個圓盤開始，這與我們原來的問題相似，區別只是在等效重力加速度為 g' 的引力場中進行運動。

$$g' = g - a_1 = g(1-c)$$

圓盤的總數減少 1。因為按照前面圓盤很多，自然認為上邊(第二個) 圓盤的加速度等於

$$a_1' = cg'$$

因而，在靜止參照系裡第二個圓盤的加速度等於

$$a_2 = a_1' + a_1 = cg' + cg = c(g' + g) = cg(2-c) \qquad (5)$$

將表示 a_1 和 a_2 的(4)和(5)式代入方程組(3)第一個方程中，求出 c

$$c^2 + 2c - 2 = 0，$$

得 $c = \sqrt{3} - 1$

由此可見，當 N 足夠大時，第一個圓盤的加速度等於

$$a_1 = (\sqrt{3} - 1)g$$

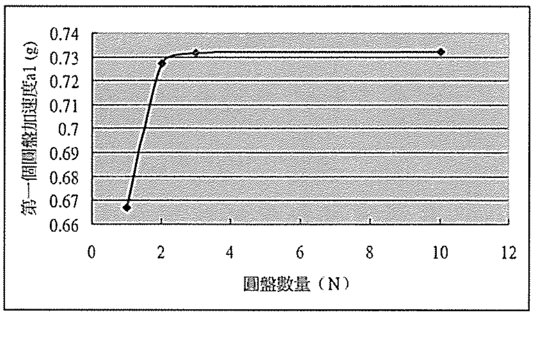
綜合以上結果，第一個圓盤的加速度：

N=1 $\quad a_1 = 2g/3 = 0.667g$

N=2 $\quad a_1 = 8g/11 = 0.727g$

N=3 $\quad a_1 = 30g/41 = 0.7317g$

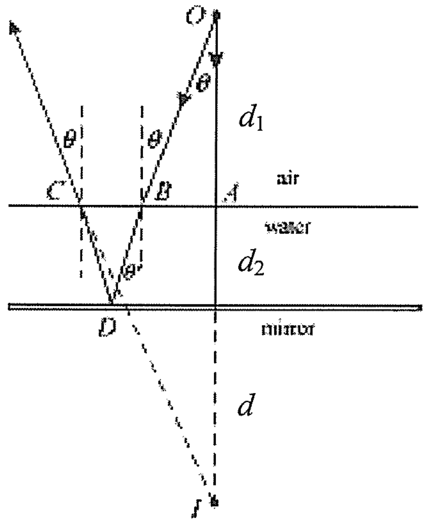
$N \to \infty$ $\quad a_1 = (\sqrt{3} - 1)g \sim 0.73205g$



雖然圓盤數量越多，第一個圓盤的加速度越快，但在數量為多於兩個圓盤串聯後，第一個圓盤的加速度，就不太會增加了，而趨近 $a_1 = (\sqrt{3} - 1)g$ 。

【第五題參考解】

如圖所示，利用兩條光線的交點，可求得燈泡成像的位置。



藉由 Snell's Law，在水與空氣的介面上，可以得到入射角 θ 與折射角 θ' 的關係為

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_w}{n_{air}}$$

(由於 θ 與 θ' 皆非常的小，且 $n_{air}=1$)

因此可化簡成 $\theta\approx n_w\theta'$

燈泡的位置為 O 點，位於水面上高度為 $d_1=250\,cm$ 的距離，而水面下深度為 $d_2=200\,cm$ 的底部為一面大鏡子，燈泡所成的像位於 I 處，假設 I 位於鏡面下 d 處。

在三角形 OAB 中

$$|AB|=d_1\tan\theta\approx d_1\theta$$

而在三角形 CBD 中

$$|BC|=2d_2\tan\theta'\approx 2d_2\theta'\approx 2d_2\frac{\theta}{n_w}$$

所以，在三角形 ACI 中，，因此

$$d=|AI|-d_2=\frac{|AC|}{\tan\theta}-d_2\approx\frac{|AB|+|BC|}{\theta}-d_2=\left(d_1\theta+\frac{2d_2\theta}{n_w}\right)\frac{1}{\theta}-d_2$$

$$=d_1+\frac{2d_2}{n_w}-d_2=250\,cm+\frac{2(200\,m)}{\frac{4}{3}}-200\,cm=350\,cm$$

【第六題參考解】

$$m\ddot{\bar{x}} = -k\ddot{\bar{x}} + \frac{RQ^2}{(L+x)^2}\hat{x} = -k\bar{x} + \frac{RQ^2}{L^2(1+\frac{x}{L})^2}\hat{x}$$

$$\approx -k\bar{x} + \frac{RQ^2}{L^2}(1-\frac{2}{L}x)\hat{x} = -(k+\frac{2RQ^2}{L^3})\bar{x} + \frac{RQ^2}{L^2}\hat{x}$$

$$\therefore -m\omega^2 = -(k+\frac{2RQ^2}{L^3})$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}(1+\frac{2RQ^2}{kL^3})$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}(1+\frac{2RQ^2}{kL^3})} \approx \omega_0(1+\frac{RQ^2}{kL^3})$$

$$\therefore \frac{\omega}{\omega_0} = 1+\frac{RQ^2}{kL^3}$$

【第七題參考解】

(1) 表面張力的效應可忽略，且$h>>\lambda$，故由圖(a)知：$\tanh\left(2\pi h/\lambda\right)\approx 1$，所以表面重力波的形式可以寫成：$v=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$。速度可以寫成：$v=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}}$，因而可以得到$\omega^2=k\times g$，微分後可以得到$2\omega d\omega=dk\times g$，故群速度可以寫成：$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{g}{2\omega}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=\frac{1}{2}v$，所以群速度是速度的$\frac{1}{2}$倍。

(2) 重力的效應可忽略，且$h>>\lambda$，故由圖(a)知：$\tanh\left(2\pi h/\lambda\right)\approx 1$，所以表面張力波的形式可以寫成：$v=\sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$。速度可以寫成：$v=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}}$，因而可以得到$\omega^2=k^3\times\frac{\gamma}{\rho}$，微分後可以得到$2\omega d\omega=3k^2dk\times\frac{\gamma}{\rho}$，故群速度可以寫成：$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{3k^2}{2\omega}\frac{\gamma}{\rho}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}}=\frac{3}{2}v$，所以群速度是速度的$\frac{3}{2}$倍。

(3) 海嘯產生時，波長較海水的深度大很多，即$h<<\lambda$，$\tanh\left(2\pi h/\lambda\right)\approx 2\pi h/\lambda$，故海嘯波速可以寫成：$v=\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)\times\tanh\left(2\pi h/\lambda\right)}\approx\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)\times\left(2\pi h/\lambda\right)}=\sqrt{g\times h}$，也就是$v=\sqrt{g\times h}=\frac{\omega}{k}$，故海嘯波速僅與重力加速度和海水深度有關，所以群速度等於速度。