1. 一個雙子星系統是由兩顆質量各爲 m_1 和 m_2 的星球組成，它們繞其系統質心以半徑 r_1 和 r_2 做圓周運動。

(a)質心作

(1)圓周運動，

(2)直線運動，

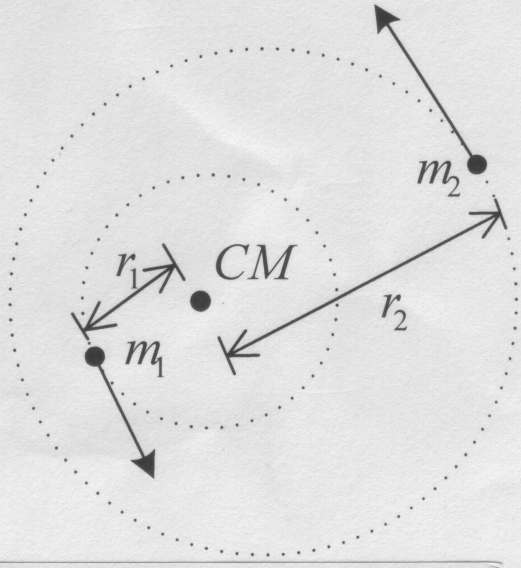
(3)靜止不動，

(4)其他運動，

就你的答案說明其理由。

(b)試證刻卜勒第三定律可以寫成下式

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(r_1+r_2)^3.$$



【此題答案由此開始作答】

一、(a)質心靜止不動

理由：$\vec{F}=0$ 或動量守衡

(b) $\vec{F}_{12} = \dfrac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} = \dfrac{m_1v_1^2}{r_1}$

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_1(r_1+r_2)}{\sqrt{Gm_2r_1}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r_1(r_1+r_2)^2}{Gm_2} \cdots (1)$$

質心(動量守恆)

$$m_1r_1 - m_2r_2 = 0$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

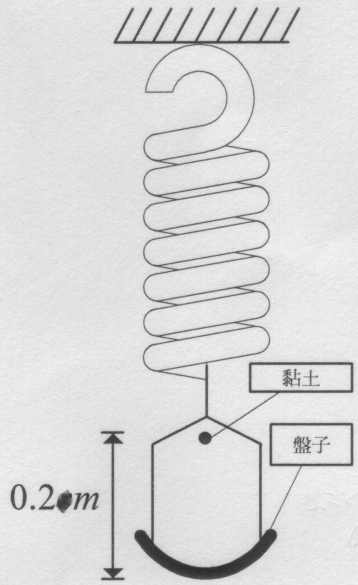
$$\frac{m_1}{m_2} + 1 = \frac{r_2}{r_1} + 1$$

$$\frac{m_1+m_2}{m_2} = \frac{r_1+r_2}{r_1}$$

$$\therefore \frac{r_1}{m_2} = \frac{r_1+r_2}{m_1+m_2}$$ 代入第(1)式

得 $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(r_1+r_2)^3$

(二)、一個盤子質量爲 0.3kg 懸掛在某彈簧下時彈簧被拉長 0.1m。有一質量爲 0.1kg 的黏土由高 0.2m 的高度自靜止狀態掉落到盤子上，如圖所示。求盤子再向下移動的最大位移。(重力加速度 g=10m/s^2)



【此題答案由此開始作答】

二、 $F = kx$

$mg = kx$

$\therefore k = \dfrac{(0.3)(10)}{0.1} = 30(N/m)$

$v^2 = 2gh$

$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(10)(0.2)} = 2(m/s)$

動量守恆

$mv = (m+M)V$

$\therefore V = \dfrac{0.1(2)}{0.3+0.1} = \dfrac{1}{2}(m/s)$

力學能守恆 $\dfrac{1}{2}(m+M)V^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}k(x+A)^2 - (m+M)gA$

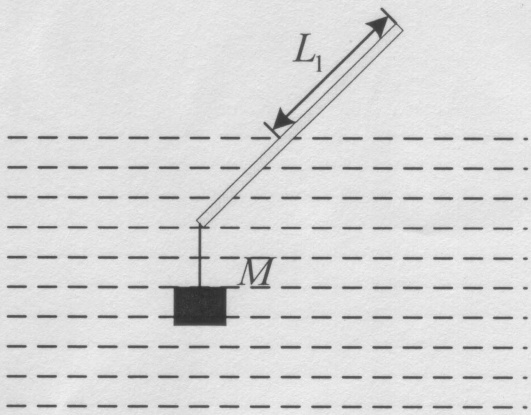
$\dfrac{1}{2}(0.4)(0.5)^2 + \dfrac{1}{2}(30)(0.1)^2 = \dfrac{1}{2}(30)(0.1+A)^2 - (0.4)(10)A$

$15A^2 - A - 0.05 = 0$

$A = \dfrac{1 \pm 2}{30}$(負值不符合)

$\therefore A = 0.1m$

3. 質量爲 m，長度爲 L，半徑爲 r 的均勻浮標。浮標底端用一輕繩綁一質量爲 M 的鉛錘，浸入某液體中，浮標露出液面的長度爲 L_1，如圖所示。求液體的密度。



【此題答案由此開始作答】

三、以浮標底端當參考點平衡　　力矩=0

$$\tau = B\left(\frac{L-L_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - W\left(\frac{L}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = 0$$

$$B\left(\frac{L-L_1}{2}\right)\cos\theta - W\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta = 0$$

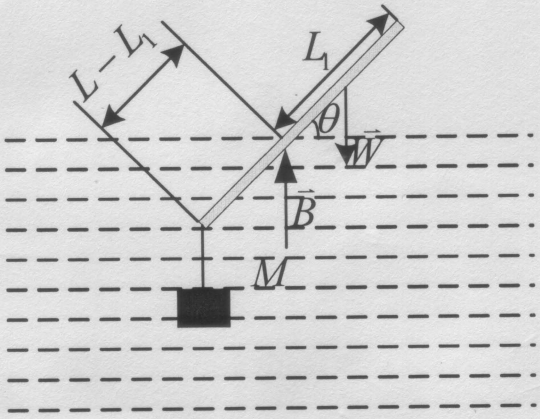
浮標沉在液面下所受的浮力

$B = \rho_\ell \pi r^2 (L-L_1) g$　　，　　ρ_ℓ：液體密度

$W = mg = \rho \pi r^2 L g$

$$\rho_\ell \pi r^2 (L-L_1)\frac{L-L_1}{2} g = \rho \pi r^2 L \frac{L}{2} g$$

$$\therefore \rho_\ell = \rho \frac{L^2}{(L-L_1)^2} = \frac{m}{\pi r^2 L}\frac{L^2}{(L-L_1)^2} = \frac{mL}{\pi r^2 (L-L_1)^2}$$

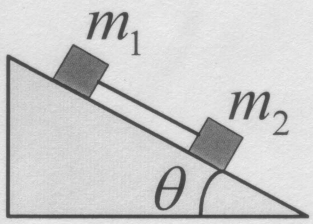


4. 二物體質量爲 $m_1 = 1.65kg$ 及 $m_2 = 30.30kg$，以無質量之棒連結(m_1 在上方)，棒與斜面平行，由 m_1 跟 m_2 沿斜面下滑，如圖所示。斜面之傾角爲 $\theta = 30^\circ$，m_1 與斜面間之動摩擦係數爲 $\mu_1 = 0.226$；m_2 與斜面間之動摩擦係數爲 $\mu_2 = 0.113$。求

(a) m_1 與 m_2 間棒之張力。

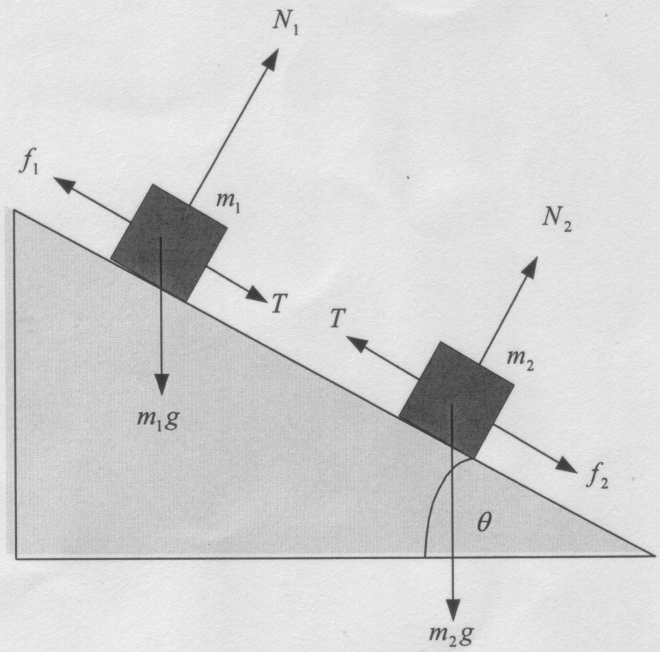
(b) 兩物共有之加速度。

(c) 若 m_1 與 m_2 對調則(a)與(b)之答案是否相等?



【此題答案由此開始作答】

四、



如圖每物沿斜面之受力情形

For m_1：

$T + m_1 g\sin\theta - f = m_1 a$

$T = \mu_1 m_1 g\cos\theta + m_1 a - m_1 g\sin\theta \cdots\cdots\cdots(1)$

For m_2：

$m_2 g\sin\theta - T - f_2 = m_2 a$

$T = m_2 g\sin\theta - \mu_2 m_2 g\cos\theta - m_2 a \cdots\cdots\cdots(2)$

(a) $(1)\times m_2 + (2)\times m_1$ 得

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mu_1 - \mu_2) g\cos\theta$$

$$= \frac{1.65\times 3.30}{1.65+3.30}(0.226-0.113)\times 9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1.05nt$$ (1.5)

(b) $$a = g\sin\theta - \frac{g\cos\theta}{m_1+m_2}(\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1)$$

$$= 9.8\times\frac{1}{2} - \frac{9.8\times\sqrt{\frac{3}{2}}}{1.65+3.30}(0.226\times 1.65 + 0.113\times 0.3)$$

$$= 3.62$$ (3.9)

(c)如m_1在前，m_2在後，上列二方程式亦同，故答案相同，唯此時棒所受之力爲壓力。

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\mu_2 - \mu_1) g\cos\theta < 0$$

5. 一盒置於秤上，調整秤之讀數使爲零。。石子(質量 = m)連續由盒底之上 h 高處落入盒內，每秒落下之石子數爲 μ ，若石子與盒爲完全非彈性碰撞，求石子開始落下 t 秒後秤的讀數。

【此題答案由此開始作答】

五、

X 爲秤的指數，盒中小球受三力

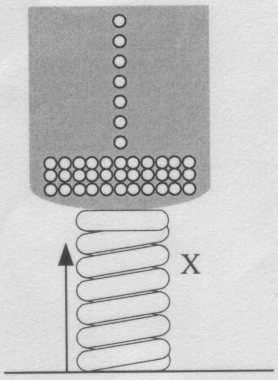
(1) x 向上

(2) 球重向下 $mg \times \mu \times t = \mu mgt$

(3) 落下中小球所施向下之力 F

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\mu \cdot \Delta tmv}{\Delta t} = \mu mv = \mu m\sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow x = \mu mgt + \mu m\sqrt{2gh} = \mu m\left(gt + \sqrt{2gh}\right)$$

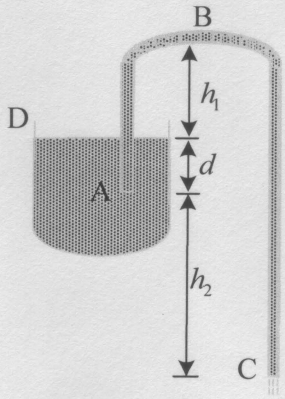


6. 虹吸管乃用於吸取不能傾斜之容器中液體的裝置。操作方式如圖所示。管中先充滿液體後，液體便可流出容器，令液體密度爲 ρ ，黏滯亦可忽略。(大氣壓力爲 P_0)

甲、從 C 點流出之液體流速爲何?

乙、B 點最高處之壓力爲何?

丙、h_1 最高多少時吸管仍可工作?



【此題答案由此開始作答】

六、

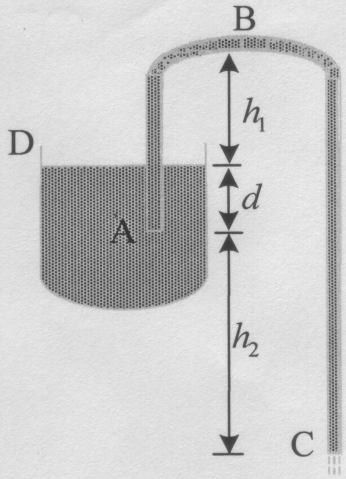
(a) 液面 D－C 之流線

$$P_c + \frac{1}{2}\rho V_c^2 + \rho g h_c = P_D + \frac{1}{2}\rho V_D^2 + \rho g h_D$$

令 $V_D = 0$ 且 $P_c = P_D = P_o$(大氣壓力)

$$V_c^2 = 2g(h_D - h_c) = 2g(h_2 + d)$$

$$V_c = \sqrt{2g(h_2 + d)}$$



(b) $B \rightarrow C$ 之流線

$$P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \rho g h_B = P_c + \frac{1}{2}\rho V_c^2 + \rho g h_c$$

令 $V_B = V_c$ $\qquad P_c = P_o$

$$P_B = P_c + \rho g(h_c - h_B) = P_o - \rho g(h_1 + d + h_2)$$

(c) $P_B = 0$ 時 h 爲極大值

$$P_o - \rho g(h_{1\max} + d + h_2) = 0$$

$$h_{1\max} = \frac{P_o}{\rho g} - d - h_2 \Leftarrow \text{超過此值便流不出水來}$$